

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON L. COLLATZ · H. GÖRTLER · K. KLOTTER · H. NEUBER,
V. TOLLMIEHN UND C. WEBER · HERAUSGEGEBEN VON FR. A. WILLERS, DRESDEN

BAND 37

SEITE 81—160

HEFT 3/4

MÄRZ/APRIL 1957

AUS DEM INHALT:

H A U P T A U F S Ä T Z E

W. Noll, Verschiebungsfunktionen für elastische Schwingungsprobleme / **W. Uhlmann**, Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung / **W. Uhlmann**, Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben einer gewöhnlichen Differentialgleichung höherer Ordnung / **H. Saito**, Stress in a Placet Containing Infinite Parallel Rows of Holes / **W. Roth**, Der Membranspannungszustand in einer Rohrschlange / **P. Medgyessy**, Anwendungsmöglichkeiten der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bei der Auswertung von Messungsergebnissen / **O. Hellman**, Ein Verfahren zur Bildung von Matrizen

KLEINE MITTEILUNGEN
BUCHBESPRECHUNGEN
EINGEGANGENE BÜCHER

AKADEMIE-VERLAG GMBH · BERLIN

INHALT:

	Seite
Hauptaufsätze. W. Noll: Verschiebungsfunktionen für elastische Schwingungsprobleme	81
W. Uhlmann: Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung.	88
W. Uhlmann: Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben einer gewöhnlichen Differentialgleichung höherer Ordnung	99
H. Saito: Stress in a Plate Containing Infinite Parallel Rows of Holes	111
W. Roth: Der Membranspannungszustand in einer Rohrschlange	115
P. Medgyessy: Anwendungsmöglichkeiten der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bei der Auswertung von Messungsergebnissen	128
O. Hellman: Ein Verfahren zur Bildung von Matrizen	139
Kleine Mitteilungen. H. J. Stetter: Eine Verallgemeinerung des Kármán-Moore-Verfahrens zur Berechnung der linearisierten Überschallströmung um schlanke Drehkörper	145
E. Trefftz: Die Göttinger Rechenmaschinen vom Benutzer aus gesehen	146
S. Kästner: Die Differentialgleichungen der Strömung einer inkompressiblen Newtonschen Flüssigkeit in einem Wendelkanal	148
R. Gran Olsson: Einfache Darstellung dynamischer und hydrodynamischer Probleme durch Einführung logarithmischer Maßstäbe	149
A. Zajta: Über die Iteration der Potenzreihen	153
Buchbesprechungen.	155
Eingegangene Bücher	160

ANSCHRIFTEN DER AUTOREN DIESES HEFTES

Prof. W. Noll, Los Angeles 7, University Avenue 3518
Dr. W. Uhlmann, Hamburg 3, Harvestehuderweg 10
H. Saito, Sendai (Japan), Tohoku University, Dep. of Mech. Engineering
Dr. W. Roth, Karlsruhe, Durlacher Allee 8
Dr. P. Medgyessy, Budapest, Forschungsinstitut d. ungarischen Akad. d. Wiss.
Dr. O. Hellman, Kuntamotie 13, Kumpulä Taivaskallio Helsinki (Finnland)
Dr. H. Stetter, München 9, Achleitnerstr. 5
Dr. E. Trefftz, Göttingen, Max-Planck-Institut für Physik, Böttingerstr. 4
Dr. S. Kästner, Berlin-Adlershof, An der Rudower Chaussee
Prof. Dr. R. Gran Olsson, Trondheim, Techn. Hochschule
A. Zajta, Budapest
Dr. M. Schäfer, Göttingen, Kantstr. 30
Prof. Dr. Landsberg, Radebeul, Löbnitzgrundstr. 2
Prof. Dr. Draeger, Potsdam, Helmholtzstr. 8
Dipl.-Phys. H. Zimmer, Dresden A 20, Teplitzer Str. 50
Prof. Dr. L. Schiller, Weilburg/Lahn, Frankfurter Str. 19
Dipl.-Phys. G. Landgraf, Dresden A 20, Basteistr. 3
Prof. Dr. Willers, Dresden A 36, Kauschaer Str. 6
Prof. Dr. M.-P. Geppert, Bad Nauheim, Kerckhoff-Institut, Statistische Abteilung
Prof. Dr. M. Hasse, Dresden A 27, Zeunerstr. 91
Dr. H.-L. Burmeister, Dresden A 27, Hohe Str. 40
Prof. Dr. Heinhold, München, Techn. Hochschule, Arcisstr. 21
Prof. Dr. Schulz-Grunow, Aachen, Rhein.-Westph. Techn. Hochschule, Lehrstuhl für Mechanik
Dipl.-Ing. W. Kraak, Dresden N 6, Arndtstr. 4

MATHEMATISCHE NACHRICHTEN

Im Auftrage der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

HERAUSGEBER:

Erhard Schmidt gemeinsam mit *Heinrich Grell*,
Georg Hamel, *Helmut Hasse*, *H. L. Schmid*
und *Kurt Schröder*

AUS DEM INHALT DES HEFTES I (Bd. 16)

Ernst Mohr

Eigenwerte gekoppelter nicht-selbstadjungierter elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Bernhard Banaschewski

Über die Vervollständigung geordneter Gruppen

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE-VERLAG-BERLIN

Wir bitten alle Manuskriptsendungen direkt an den Herausgeber Prof. Dr. Dr. h. c. Fr. A. Willers, Dresden A 36, Kauschaer Str. 6, zu schicken. Zu jeder Arbeit erbitten wir eine kurze Zusammenfassung des Inhalts, die von uns in die englische, französische und russische Sprache übersetzt wird. Der Verlag behält sich für alle Beiträge das Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung vor. Die Autoren erhalten von den Hauptaufätzen 75, von den Kleinen Mitteilungen 10 Sonderdrucke ohne Berechnung

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 37

März/April

3/4

Verschiebungsfunktionen für elastische Schwingungsprobleme*)

Von W. Noll in Los Angeles

Das vektorielle Verschiebungspotential von Galerkin-Westergaard und die Lovesche Verschiebungsfunktion werden hier in der Weise verallgemeinert, daß sie nicht nur für statische, sondern auch für Schwingungsprobleme der linearen Elastizitätstheorie verwendbar werden. Es zeigt sich, daß mit der Verschiebungsfunktion genau diejenigen Probleme erfaßt werden, für die die Wirbel des Verschiebungsfeldes parallel zu einer festen Ebene sind. Zur besseren Anwendbarkeit der Methode werden die Verschiebungen und Spannungen in allgemeinen, Zylinder- und Kugelkoordinaten durch die Verschiebungsfunktion ausgedrückt.

In this paper both the displacement potential of Galerkin-Westergaard and Love's function are generalized in such a manner that they can be used not only for static problems but also for vibration problems of linear elasticity. It turns out that Love's function exists exactly for those problems in which the curl of the displacement field is parallel to a fixed plane. In order to render the method more applicable displacements and stresses are expressed in terms of Love's function for general cylindrical and spherical coordinates.

Le potentiel vectoriel de déplacement de Galerkin-Westergaard et la fonction de Love sont généralisés ici de la manière qu'ils deviennent applicables non seulement aux problèmes statiques mais aussi aux problèmes d'oscillations de la théorie linéaire d'élasticité. Pour que la fonction de Love existe il faut et il suffit que le rotationnel du champ de déplacement soit parallèle à un plan fixe. Pour faciliter l'application de la méthode les déplacements et les tensions sont exprimés par la fonction de Love en coordonnées générales, cylindriques et sphériques.

Векторный потенциал смещений Галёркина-Вестергадра и функция смещений Лява обобщаются на динамические задачи линейной теории упругости таким образом, что могут быть применены в проблеме колебаний. Оказывается, что функцией смещений охватываются как раз те проблемы, в которых вихри поля смещений остаются параллельными некоторой фиксированной плоскости. Для облегчения применений приводятся выражения смещений и напряжений через функцию смещений в общей криволинейной, цилиндрической и сферической системах координат.

Einleitung

Es sind viele Methoden zur Lösung der Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie mit Hilfe von Spannungs- und Verschiebungsfunktionen bekannt (vgl. [1] und die dort angegebene Literatur). Es handelt sich dabei jedoch um statische Probleme. Hier soll nun am Beispiel des vektoriellen Verschiebungspotentials von Galerkin-Westergaard und am Beispiel der Loveschen Verschiebungsfunktion gezeigt werden, wie sich diese Methoden auch bei Schwingungsproblemen verwenden lassen. Die Frage der Vollständigkeit der Ansätze wird dabei erschöpfend behandelt. Das Ergebnis, daß sich mit der Loveschen Funktion nicht nur alle rotationssymmetrischen Probleme, sondern genau diejenigen Probleme erfassen lassen, bei denen die Wirbel des Verschiebungsfeldes senkrecht zu einem festen Vektor stehen, dürfte auch für den statischen Fall neu sein.

Die Beweise stützen sich auf den bekannten Satz, daß sich jedes Vektorfeld in einem einfach zusammenhängendem Gebiet als Summe eines wirbelfreien und eines quellenfreien Feldes aufspalten läßt und auf die Tatsache, daß eine Differentialgleichung der Form $(\Delta + \alpha)\varphi = f$ (Δ = Laplace-Operator, $\alpha = \text{const}$) für gegebenes f eine Lösung φ hat (wegen der Abwesenheit von Randbedingungen hat sie sogar viele Lösungen). Auf Differenzierbarkeitsfragen braucht nicht eingegangen zu werden, da alle vorkommenden Funktionen als analytisch angenommen werden können (dies folgt meist aus bekannten Sätzen über Lösungen von Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten).

Für die allgemeinen Untersuchungen erweist sich die direkte, koordinatenfreie Bezeichnungswegsweise als am zweckmäßigsten. In § 4 werden die auf die Verschiebungsfunktion bezüglichen Ergebnisse auf allgemeine Koordinaten umgeschrieben. Dabei bedienen wir uns der Bezeichnungen von [2], die hier kurz zusammengestellt seien:

1. Ist \mathbf{v} ein Vektorfeld, so bezeichnen $(\mathbf{v})^i = v^i$ und $(\mathbf{v})_i = v_i$ seine kontra- bzw. kovarianten Komponenten. Analog sollen $(\mathbf{T})_{ik} = t_{ik}$ die kovarianten Komponenten des Tensors \mathbf{T} bedeuten. Die kovarianten Komponenten des Einheitstensors \mathbf{I} werden jedoch wie üblich mit g_{ik} bezeichnet, und g ist die Determinante der Matrix $\|g_{ik}\|$. Es ist zu beachten, daß die physikalischen Kompo-

*) Diese Arbeit wurde zum Teil von einem Kontrakt des Office of Naval Research unterstützt.

nenten im allgemeinen nicht mit den kovarianten oder kontravarianten Komponenten übereinstimmen.

2. Die kovariante Ableitung nach x^i wird durch ∇_i und die partielle Ableitung durch ∂_i angedeutet. Es gilt

$$\nabla_i v_k = \partial_i v_k - \Gamma_{ik}^l v_l,$$

wo Γ_{ik}^l die Christoffelschen Symbole sind.

3. Die folgende Liste dient zur Umrechnung der wichtigsten Operationen in Komponenten-schreibweise:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u^j v_j = u_j v^j, & (\text{grad } \varphi)_i &= \nabla_i \varphi = \partial_i \varphi, \\ \text{div } \mathbf{v} &= \nabla_j v^j = (\sqrt{g})^{-1} \partial_j (\sqrt{g} v^j), \\ (\nabla \mathbf{v})_{ik} &= (\nabla \mathbf{v})_{ki} = \nabla_k v_i, \\ \Delta \varphi &= \text{div grad } \varphi = \nabla_j \nabla^j \varphi = (\sqrt{g})^{-1} \partial_i (\sqrt{g} g^{ji} \partial_i \varphi), \\ (\Delta \mathbf{v})_i &= \nabla_j \nabla^j v_i. \end{aligned}$$

In § 5 und 6 spezialisieren wir die Formeln auf Zylinder- und Kugelkoordinaten und geben einige Produktlösungen der für die Verschiebungsfunktion maßgebenden Differentialgleichung an. Es ist zu erwarten, daß damit einige spezielle Probleme erfolgreich behandelt werden können.

1. Die Grundgleichung

Wir betrachten einen homogenen und isotropen elastischen Körper, der ein einfach zusammenhängendes Gebiet des dreidimensionalen Raumes einnimmt. Punkte dieses Gebietes werden mit P bezeichnet. Die Verschiebung zur Zeit t eines Punktes P aus der undeformierten Lage sei durch den Vektor $\mathbf{u} = \mathbf{u}(P, t)$ gegeben. Setzt man voraus, daß diese Verschiebung überall sehr klein ist, und nimmt man an, daß keine Massenkräfte auf den Körper einwirken, so gilt für das Verschiebungsfeld \mathbf{u} bekanntlich (vgl. z. B. [3], S. 102) die Differentialgleichung

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1),$$

in der ρ die Dichte, G den Schubmodul und ν die Querkontraktionszahl bezeichnen.

Schwingungen der Frequenz $\omega/2\pi$ sind durch Real- und Imaginärteil von Lösungen der Form

$$\mathbf{u}(P, t) = e^{i\omega t} \mathbf{v}(P) \quad (1.2)$$

gegeben, wobei $\mathbf{v}(P)$ die Schwingungsamplitude nach Richtung und Größe angibt. Einsetzen von (1.2) in (1.1) liefert die für uns grundlegende Differentialgleichung

$$\mathfrak{L}[\mathbf{v}] = \Delta \mathbf{v} + \alpha \text{grad div } \mathbf{v} + \beta \mathbf{v} = 0 \quad (1.3),$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{1-2\nu}, \quad \beta = \frac{\omega^2 \rho}{G} \quad (1.4).$$

Der Fall statischer Deformation entspricht dem Sonderfall $\omega = 0$ in (1.2) und $\beta = 0$ in (1.3).

Der Spannungstensor $\mathbf{S} = \mathbf{S}(P, t)$ hängt mit \mathbf{u} durch die Spannungs-Dehnungs-Gleichungen

$$\mathbf{S} = \frac{2G\nu}{1-\nu} (\text{div } \mathbf{u}) \mathbf{I} + G [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (1.5)$$

zusammen. Dabei bezeichnet ∇ den Differentiationsoperator, \mathbf{I} den Einheitstensor, und $(\nabla \mathbf{u})^t$ bedeutet den aus $\nabla \mathbf{u}$ durch Transposition entstehenden Tensor. Ist \mathbf{u} eine Schwingung der Form (1.2), so hat \mathbf{S} die Gestalt $\mathbf{S} = e^{i\omega t} \mathbf{T}$, und den Tensor \mathbf{T} wollen wir die Spannungsamplitude nennen. Sie ist gemäß (1.2) und (1.5) durch

$$\mathbf{T} = G \left\{ \frac{2\nu}{1-\nu} (\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{I} + \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t \right\} \quad (1.6)$$

gegeben.

2. Die Verallgemeinerung des vektoriellen Verschiebungspotentials von Galerkin-Westergaard

Satz I: Es sei $\mathbf{q} = \mathbf{q}(P)$ ein Vektorfeld, das der Differentialgleichung

$$\left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) (\Delta + \beta) \mathbf{q} = (\Delta + \beta) \left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) \mathbf{q} = 0 \quad (2.1)$$

genügt. Dann erfüllt

$$\mathbf{v} = \left(\Delta + \frac{\beta}{1 + \alpha} \right) \mathbf{q} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \text{grad div } \mathbf{q} \dots \dots \dots (2.2)$$

die Grundgleichung (1.3), d. h. $\mathfrak{L}[\mathbf{v}] = 0$, gibt also eine mögliche Schwingungsamplitude an.

Umgekehrt läßt sich jede Lösung von $\mathfrak{L}[\mathbf{v}] = 0$ in der Form (2.2) darstellen, wobei \mathbf{q} der Differentialgleichung (2.1) genügt.

Wir wollen \mathbf{q} ein zu \mathbf{v} gehöriges Verschiebungspotential nennen.

Bemerkung: Im statischen Falle ($\beta = 0$) spezialisiert sich (2.1) zu $\Delta \Delta \mathbf{q} = 0$, und \mathbf{q} wird (bis auf einen konstanten Faktor) gleich dem bekannten Verschiebungspotential von Galerkin-Westergaard (vgl. z. B. [1], S. 248).

Beweis: Es sei zunächst \mathbf{q} ein beliebiges Vektorfeld und es sei dann \mathbf{v} durch (2.2) definiert. Dann gilt

$$\mathfrak{L}[\mathbf{v}] = \Delta \mathbf{v} + \alpha \text{grad div } \mathbf{v} + \beta \mathbf{v} = (\Delta + \beta) \left(\Delta + \frac{\beta}{1 + \alpha} \right) \mathbf{q} \dots \dots \dots (2.3).$$

Bildet man nämlich aus (2.2)

$$\text{div } \mathbf{v} = \left(\Delta + \frac{\beta}{1 + \alpha} \right) \text{div } \mathbf{q} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \Delta \text{div } \mathbf{q} = \frac{1}{1 + \alpha} (\Delta + \beta) \text{div } \mathbf{q} \dots \dots (2.4),$$

$$\alpha \text{grad div } \mathbf{v} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} (\Delta + \beta) \text{grad div } \mathbf{q} \dots \dots \dots (2.5),$$

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \left(\Delta + \frac{\beta}{1 + \alpha} \right) \mathbf{q} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \Delta \text{grad div } \mathbf{q} \dots \dots \dots (2.6),$$

$$\beta \mathbf{v} = \beta \left(\Delta + \frac{\beta}{1 + \alpha} \right) \mathbf{q} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \beta \text{grad div } \mathbf{q} \dots \dots \dots (2.7)$$

und addiert (2.5), (2.6) und (2.7), so ergibt sich in der Tat (2.3). Genügt nun \mathbf{q} der Differentialgleichung (2.1), so ist die rechte Seite von (2.3) Null, \mathbf{v} erfüllt dann also die Grundgleichung $\mathfrak{L}[\mathbf{v}] = 0$.

Es sei nun umgekehrt eine Lösung \mathbf{v} von $\mathfrak{L}[\mathbf{v}] = 0$ gegeben. Sie läßt sich in der Form

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi + \mathbf{w}, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0 \dots \dots \dots (2.8)$$

aufspalten. Wir nehmen eine Lösung \mathbf{q}^* von

$$\left(\Delta + \frac{\beta}{1 + \alpha} \right) \mathbf{q}^* = \mathbf{w} \dots \dots \dots (2.9),$$

dann eine Lösung ψ von

$$(\Delta + \beta) \psi = \varphi + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \text{div } \mathbf{q}^* \dots \dots \dots (2.10)$$

und bilden damit

$$\mathbf{q} = (1 + \alpha) \text{grad } \psi + \mathbf{q}^* \dots \dots \dots (2.11).$$

Wir zeigen, daß dieses \mathbf{q} mit \mathbf{v} durch (2.2) zusammenhängt. Wegen (2.9) und (2.10) hat man

$$\begin{aligned} \left(\Delta + \frac{\beta}{1 + \alpha} \right) \mathbf{q} &= \text{grad } [(1 + \alpha) \Delta + \beta] \psi + \mathbf{w} = \text{grad } [(1 + \alpha) (\Delta + \beta) \psi - \alpha \beta \psi] + \mathbf{w} \\ &= \text{grad } [(1 + \alpha) \varphi + \alpha \text{div } \mathbf{q}^* - \alpha \beta \psi] + \mathbf{w} \dots \dots \dots (2.12). \end{aligned}$$

Wegen $\text{div } \mathbf{w} = 0$ folgt ferner

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathbf{q} &= (1 + \alpha) \Delta \psi + \text{div } \mathbf{q}^* = (1 + \alpha) \varphi + (1 + \alpha) \text{div } \mathbf{q}^* - (1 + \alpha) \beta \psi, \\ \frac{\alpha}{1 + \alpha} \text{grad div } \mathbf{q} &= \text{grad } (\alpha \varphi + \alpha \text{div } \mathbf{q}^* - \alpha \beta \psi) \end{aligned} \right\} \dots (2.13).$$

Subtraktion von (2.12) und (2.13) zeigt, daß

$$\left(\Delta + \frac{\beta}{1 + \alpha} \right) \mathbf{q} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \text{grad div } \mathbf{q} = \text{grad } \varphi + \mathbf{w}$$

gilt, wegen (2.8) also in der Tat (2.2) erfüllt ist. Daraus folgt die Gültigkeit der Beziehung (2.3), und wegen $\mathfrak{L}[\mathbf{v}] = 0$ genügt \mathbf{q} daher auch der Differentialgleichung (2.1). Q. E. D.

3. Die Verallgemeinerung der Loveschen Verschiebungsfunktion

Satz II. Es sei $\Phi = \Phi(P)$ eine skalare Ortsfunktion, die der Differentialgleichung

$$\left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha}\right)(\Delta + \beta)\Phi = 0 \quad (3.1)$$

genügt. Ferner sei \mathfrak{b} ein beliebiger, konstanter Vektor. Dann erfüllt

$$\mathfrak{v} = -\frac{1+\alpha}{\alpha}\mathfrak{b}\left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha}\right)\Phi + \text{grad}(\mathfrak{b} \cdot \text{grad} \Phi) \quad (3.2)$$

die Grundgleichung (1.3), d. h. $\mathfrak{L}[\mathfrak{v}] = 0$, gibt also eine mögliche Schwingungsamplitude an. Außerdem gilt

$$\mathfrak{b} \cdot \text{rot} \mathfrak{v} = 0 \quad (3.3).$$

Umgekehrt läßt sich jede Lösung von $\mathfrak{L}[\mathfrak{v}] = 0$, für die (3.3) gilt, in der Form (3.2) darstellen, wobei Φ der Differentialgleichung (3.1) genügt.

Wir wollen Φ eine zu \mathfrak{v} gehörige Verschiebungsfunktion nennen.

Bemerkung: Satz II besagt, daß sich genau diejenigen Probleme durch eine Verschiebungsfunktion erfassen lassen, bei denen die Wirbel des Verschiebungsfeldes senkrecht zu einem festen Vektor stehen. Wie man leicht sieht, trifft das sowohl im Falle der Rotationssymmetrie um eine zu \mathfrak{b} parallele Achse als auch im Falle ebener Probleme (für jede zu \mathfrak{b} parallele Ebene) immer zu. Im statischen Falle ($\beta = 0$) spezialisiert sich (3.1) zu $\Delta \Delta \Phi = 0$. Liegt außerdem noch Rotationssymmetrie vor, so wird Φ (bis auf einen konstanten Faktor) gleich der bekannten Loveschen Verschiebungsfunktion (vgl. z. B. [1], S. 248).

Beweis: Der erste Teil des Satzes ergibt sich unmittelbar aus Satz I durch die Spezialisierung $\mathfrak{q} = -\frac{1+\alpha}{\alpha}\mathfrak{b}\Phi$. Für die Rotation von (3.2) erhält man

$$\text{rot} \mathfrak{v} = \frac{1+\alpha}{\alpha}\mathfrak{b} \times \text{grad} \left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha}\right)\Phi,$$

woraus sofort (3.3) folgt.

Zum Beweis der Umkehrung sind einige Vorbereitungen nötig: Wir legen eine Ebene \mathfrak{E} senkrecht zu \mathfrak{b} fest und nehmen o. B. d. A. an, daß \mathfrak{b} Einheitsvektor ist. Jeder Punkt P des Raumes ist dann durch den Fußpunkt Q des Lotes von P auf \mathfrak{E} und durch die gerichtete Länge z dieses Lotes ($\overrightarrow{QP} = z\mathfrak{b}$) eindeutig festgelegt. Jede Funktion von P kann daher als Funktion der beiden Variablen Q und z aufgefaßt werden. Die partiellen Differentialoperatoren grad_0 , div_0 , rot_0 , Δ_0 sollen im Sinne der Differentiation nur nach Q verstanden werden, bei der z als konstanter Parameter anzusehen ist¹⁾. Ist \mathfrak{v} ein beliebiges Vektorfeld, so wollen wir mit \mathfrak{v}_0 seine Komponente senkrecht zu \mathfrak{b} und mit $\nu\mathfrak{b}$ seine Komponente in Richtung von \mathfrak{b} bezeichnen und kurz

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \nu\mathfrak{b} = \{\mathfrak{v}_0, \nu\}, \quad \nu = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{v} \quad (3.4)$$

schreiben. Wie man leicht sieht, gelten die Beziehungen ($\partial_z = \partial/\partial z$)

$$\text{grad} \varphi = \{\text{grad}_0 \varphi, \partial_z \varphi\}, \quad \mathfrak{b} \cdot \text{grad} \varphi = \partial_z \varphi \quad (3.5),$$

$$\text{div} \mathfrak{v} = \text{div}_0 \mathfrak{v}_0 + \partial_z \nu \quad (3.6),$$

$$\text{rot}_0 \mathfrak{v}_0 = \{0, \mathfrak{b} \cdot \text{rot} \mathfrak{v}\} \quad (3.7).$$

Es sei nun eine Lösung \mathfrak{v} von $\mathfrak{L}[\mathfrak{v}] = 0$ gegeben, die der Bedingung (3.3) genügt. Wegen (3.7) ist diese Bedingung mit

$$\text{rot}_0 \mathfrak{v}_0 = 0 \quad (3.8)$$

gleichbedeutend. \mathfrak{v}_0 ist also in der Ebene \mathfrak{E} wirbelfrei und läßt sich daher in der Form

$$\mathfrak{v}_0 = \text{grad}_0 f^* \quad (3.9)$$

darstellen. Die Grundgleichung $\mathfrak{L}[\mathfrak{v}] = 0$ kann gemäß (3.4) und (3.5) in der Gestalt

$$\Delta \mathfrak{v}_0 + \alpha \text{grad}_0 (\text{div} \mathfrak{v}) + \beta \mathfrak{v}_0 = 0 \quad (3.10),$$

$$\Delta \nu + \alpha \partial_z (\text{div} \mathfrak{v}) + \beta \nu = 0 \quad (3.11)$$

aufgespalten werden. Einsetzen von (3.9) in (3.10) liefert

$$\text{grad}_0 [\Delta f^* + \alpha \text{div} \mathfrak{v} + \beta f^*] = 0.$$

Mit einer nur von z abhängigen Funktion $\varrho^*(z)$ gilt daher

$$\Delta f^* + \alpha \text{div} \mathfrak{v} + \beta f^* = \varrho^*(z) \quad (3.12).$$

¹⁾ In kartesischen Koordinaten hat man z. B. $\text{grad}_0 \varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, 0 \right\}$

Wir bestimmen nun eine Lösung $\varrho = \varrho(z)$ von $\left(\partial_{zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

$$\partial_{zz} \varrho + \beta \varrho = -\varrho^* \dots \dots \dots (3.13)$$

und setzen

$$f = f^* + \varrho.$$

Wegen $\text{grad}_0 \varrho = 0$ ist nach (3.9) auch

$$\mathfrak{v}_0 = \text{grad}_0 f \dots \dots \dots (3.14),$$

und wegen $\Delta \varrho = \partial_{zz} \varrho$ folgt aus (3.12) und (3.13)

$$\Delta f + \alpha \text{div } \mathfrak{v} + \beta f = 0 \dots \dots \dots (3.15).$$

Differentiation nach z und Subtraktion von (3.11) liefert

$$(\Delta + \beta)(v - \partial_z f) = 0 \dots \dots \dots (3.16).$$

Andererseits haben wir gemäß (3.5), (3.6) wegen (3.14)

$$\text{div } \mathfrak{v} = \text{div}_0 \mathfrak{v}_0 + \partial_z v = \Delta_0 f + \partial_z v = \Delta f + \partial_z (v - \partial_z f).$$

Einsetzen in (3.15) liefert

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} \left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) f + \partial_z (v - \partial_z f) = 0 \dots \dots \dots (3.17).$$

Es sei nun Φ^* eine Lösung von

$$\partial_z \Phi^* = f \dots \dots \dots (3.18).$$

Dann gilt nach (3.17)

$$\partial_z \left[\frac{1+\alpha}{\alpha} \left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) \Phi^* + (v - \partial_z f) \right] = 0,$$

also mit einer nur von Q und nicht von z abhängigen Funktion $g^*(Q)$

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} \left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) \Phi^* + (v - \partial_z f) = g^*(Q) \dots \dots \dots (3.19).$$

Wir bestimmen nun eine Lösung $g = g(Q)$ von

$$\left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) g = \left(\Delta_0 + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) g = \frac{\alpha}{1+\alpha} g^* \dots \dots \dots (3.20)$$

und setzen $\Phi = \Phi^* - g$.

Wegen (3.19) und (3.20) gilt dann

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} \left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) \Phi + (v - \partial_z f) = 0 \dots \dots \dots (3.21)$$

und außerdem wegen $\partial_z g = 0$ nach (3.18)

$$\partial_z \Phi = f \dots \dots \dots (3.22).$$

Gemäß (3.4) und (3.5) folgt schließlich aus (3.14), (3.21) und (3.22)

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} &= \text{grad}_0 f + v \mathfrak{d} = \text{grad } f + (v - \partial_z f) \mathfrak{d} \\ &= -\frac{1+\alpha}{\alpha} \mathfrak{d} \left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) \Phi + \text{grad } (\mathfrak{d} \cdot \text{grad } \Phi), \end{aligned}$$

also die Gültigkeit von (3.2). Aus (3.16) und (3.21) ersieht man, daß Φ auch der Differentialgleichung (3.1) genügt, daß also in Φ eine Verschiebungsfunktion für die gegebene Amplitude gefunden worden ist. Q. E. D.

4. Die Darstellung der Schwingungs- und Spannungsamplitude durch die Verschiebungsfunktion in allgemeinen Koordinaten

Wir wollen nun die in § 3 gewonnenen Ergebnisse in allgemeine Koordinaten umrechnen und bedienen uns dabei der in der Einleitung angegebenen Bezeichnungen. Nach (3.2) haben wir

$$v_i = -\frac{1+\alpha}{\alpha} d_i \left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) \Phi + \nabla_i d^j \nabla_j \Phi \dots \dots \dots (4.1),$$

und (1.6) lautet in Komponentenform

$$t_{ik} = G \left\{ \frac{2\nu}{1-\nu} (\text{div } \mathfrak{v}) g_{ik} + \nabla_k v_i + \nabla_i v_k \right\} \dots \dots \dots (4.2).$$

Aus (2.4) folgt für $q = -\frac{1+\alpha}{\alpha} \mathfrak{d} \Phi$

$$\text{div } \mathfrak{v} = -\frac{1}{\alpha} (\Delta + \beta) \text{div } (\mathfrak{d} \Phi) = -\frac{1}{\alpha} d^j \nabla_j (\Delta + \beta) \Phi.$$

Setzen wir dies und (4.1) in (4.2) ein, so erhalten wir

$$t_{ik} = G \left\{ -\frac{2\nu}{(1-\nu)\alpha} g_{ik} d^j \nabla_j (\Delta + \beta) \Phi - \frac{1+\alpha}{\alpha} \left(\Delta + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) (d_i \nabla_k \Phi + d_k \nabla_i \Phi) + 2 \nabla_i \nabla_k d^j \nabla_j \Phi \right\} \dots (4.3).$$

Drücken wir in (4.1) und (4.3) die kovarianten Ableitungen durch partielle Ableitungen aus und beachten (1.4), so erhalten wir das folgende Resultat:

Es sei Φ eine Lösung von

$$(\Delta + a^2)(\Delta + b^2)\Phi = 0, \quad a = \omega \sqrt{\frac{\rho(1-2\nu)}{2G(1-\nu)}}, \quad b = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} \dots (4.4)$$

und es sei

$$\Psi = \left[2(1-\nu)\Delta + (1-2\nu)\frac{\omega^2 \rho}{G} \right] \Phi \dots (4.5).$$

Durch die folgenden Formeln werden dann die Schwingungs- und Spannungsamplitude einer elastischen Schwingung gegeben:

$$v_i = -d_i \Psi + \partial_i (d^j \partial_j \Phi) \dots (4.6),$$

$$t_{ik} = G \{ -\sigma g_{ik} d^j \partial_j (\Delta + b^2) \Phi - d_i \partial_k \Psi - d_k \partial_i \Psi + 2 \partial_i \partial_k (d^j \partial_j \Phi) - 2 \Gamma_{ik}^l \partial_l (d^j \partial_j \Phi) \} \quad (4.7),$$

wobei

$$\sigma = \frac{2\nu(1-2\nu)}{1-\nu} \dots (4.8)$$

ist. Auf diese Weise werden alle Schwingungen erfaßt, für die $\mathfrak{b} \cdot \text{rot } \mathfrak{v} = 0$ gilt.

5. Zylinderkoordinaten

Für die Zylinderkoordinaten $x^1 = r$, $x^2 = \Theta$, $x^3 = z$ gilt

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\Theta\Theta} = r^2, \quad g_{zz} = 1, \quad g_{ik} = 0 \quad \text{für } i \neq k \dots (5.1),$$

$$\Gamma_{r\Theta}^{\Theta} = \Gamma_{\Theta r}^{\Theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\Theta\Theta}^r = -r \dots (5.2)$$

alle übrigen Γ_{ik}^l verschwinden. Wir wählen \mathfrak{b} als Einheitsvektor in Richtung der positiven z -Achse, so daß

$$d_r = d^r = d_{\Theta} = d^{\Theta} = 0, \quad d_z = d^z = 1 \dots (5.3)$$

gilt. Mit den Abkürzungen $\partial_{r\Theta z} = \frac{\partial^3}{\partial r \partial \Theta \partial z}$ usw. ergibt sich dann aus (4.6) und (4.7)

$$v_r = \partial_{rz} \Phi, \quad v_{\Theta} = \partial_{\Theta z} \Phi, \quad v_z = \partial_{zz} \Phi - \Psi \dots (5.4),$$

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} &= G \partial_z [-\sigma (\Delta + b^2) \Phi + 2 \partial_{rr} \Phi], \\ t_{\Theta\Theta} &= G \partial_z [-\sigma r^2 (\Delta + b^2) \Phi + 2 \partial_{\Theta\Theta} \Phi + 2 r \partial_r \Phi], \\ t_{zz} &= G \partial_z [-\sigma (\Delta + b^2) \Phi - 2 \Psi + 2 \partial_{zz} \Phi], \\ t_{r\Theta} &= 2 G \partial_{\Theta z} \left[\partial_r \Phi - \frac{1}{r} \Phi \right], \\ t_{rz} &= G \partial_r [-\Psi + 2 \partial_{zz} \Phi], \\ t_{\Theta z} &= G \partial_{\Theta} [-\Psi + 2 \partial_{zz} \Phi] \end{aligned} \right\} \dots (5.5).$$

Die physikalischen Komponenten \bar{v}_i und \bar{t}_{ik} von \mathfrak{v} und \mathfrak{T} sind durch

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_r &= v_r, \quad \bar{v}_{\Theta} = \frac{1}{r} v_{\Theta}, \quad \bar{v}_z = v_z, \\ \bar{t}_{rr} &= t_{rr}, \quad \bar{t}_{\Theta\Theta} = \frac{1}{r^2} t_{\Theta\Theta}, \quad \bar{t}_{zz} = t_{zz}, \quad \bar{t}_{r\Theta} = \frac{1}{r} t_{r\Theta}, \quad \bar{t}_{rz} = t_{rz}, \quad \bar{t}_{\Theta z} = \frac{1}{r} t_{\Theta z} \end{aligned} \right\} \dots (5.6)$$

gegeben. In (4.5), (5.5) und in der für Φ maßgebenden Differentialgleichung (4.4) ist

$$\Delta = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + \frac{1}{r^2} \partial_{\Theta\Theta} + \partial_{zz} \dots (5.7)$$

zu setzen. Einige Produktlösungen von (4.4) der Form $\Phi = f(r) g(\Theta) h(z)$ sind durch

$$\left. \begin{aligned} f(r) &= Z_n(\sqrt{a^2 + \delta^2} r), \quad Z_n(\sqrt{b^2 + \delta^2} r), \\ g(\Theta) &= e^{\pm i n \Theta}, \quad h(z) = e^{\pm \delta z} \end{aligned} \right\} \dots (5.8)$$

gegeben, wobei δ und n beliebige Konstanten sind und Z_n Zylinderfunktionen bedeuten. Diese Liste ist jedoch keineswegs vollständig.

6. Kugelkoordinaten

Für Kugelkoordinaten $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \Theta$ (siehe Bild) gilt

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2, \quad g_{\Theta\Theta} = r^2 \sin \varphi, \quad g_{ik} = 0 \quad \text{für } i \neq k \dots (6.1),$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} &= \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{r}, & \Gamma_{r\Theta}^{\Theta} &= \Gamma_{\Theta r}^{\Theta} = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\Theta}^{\Theta} &= \Gamma_{\Theta\varphi}^{\Theta} = \operatorname{ctg} \varphi, \\ \Gamma_{\Theta\Theta}^{\Theta} &= -r \sin^2 \varphi, & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} &= -r, & \Gamma_{\Theta\Theta}^{\varphi} &= -\sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots (6.2).$$

Wir wählen δ als Einheitsvektor wie im Bild, so daß

$$d^r = d_r = \cos \varphi, \quad d^\varphi = -\frac{1}{r} \sin \varphi, \quad d_\varphi = -r \sin \varphi, \quad d^\Theta = d_\Theta = 0 \dots (6.3)$$

gilt. Mit den Abkürzungen $\partial_{r\varphi\Theta} = \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi \partial \Theta}$ usw. und

$$\Gamma(\Phi) = \cos \varphi \partial_r \Phi - \frac{1}{r} \sin \varphi \partial_\varphi \Phi \dots (6.4)$$

ergibt sich dann aus (4.6) und (4.7):

$$v_r = -\cos \varphi \Psi + \partial_r \Gamma(\Phi), \quad v_\varphi = -\sin \varphi \Psi + \partial_\varphi \Gamma(\Phi), \quad v_\Theta = \partial_\Theta \Gamma(\Phi) \dots (6.5),$$

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} &= G \{ -\sigma \Gamma[(\Delta + b^2) \Phi] - 2 \cos \varphi \partial_r \Psi + 2 \partial_{rr} \Gamma(\Phi) \} \\ t_{\varphi\varphi} &= G \{ -\sigma r^2 \Gamma[(\Delta + b^2) \Phi] + 2 r \sin \varphi \partial_\varphi \Psi + 2 \partial_{\varphi\varphi} \Gamma(\Phi) + 2 r \partial_r \Gamma(\Phi) \} \\ t_{\Theta\Theta} &= G \{ -\sigma r^2 \sin^2 \varphi \Gamma[(\Delta + b^2) \Phi] + 2 \partial_{\Theta\Theta} \Gamma(\Phi) + 2 r \sin^2 \varphi \partial_r \Gamma(\Phi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \partial_\varphi \Gamma(\Phi) \} \\ t_{r\varphi} &= G \left\{ -\cos \varphi \partial_\varphi \Psi + r \sin \varphi \partial_r \Psi + 2 \partial_{r\varphi} \Gamma(\Phi) - \frac{2}{r} \partial_\varphi \Gamma(\Phi) \right\} \\ t_{r\Theta} &= G \partial_\Theta \left[-\cos \varphi \Psi + 2 \partial_r \Gamma(\Phi) - \frac{2}{r} \Gamma(\Phi) \right] \\ t_{\varphi\Theta} &= G \partial_\Theta [r \sin \varphi \Psi + 2 \partial_\varphi \Gamma(\Phi) - 2 \operatorname{ctg} \varphi \Gamma(\Phi)] \end{aligned} \right\} (6.6).$$

Die physikalischen Komponenten \bar{v}_i und \bar{t}_{ik} sind

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_r &= v_r, & \bar{v}_\varphi &= \frac{1}{r} v_\varphi, & \bar{v}_\Theta &= \frac{1}{r \sin \varphi} v_\Theta, \\ \bar{t}_{rr} &= t_{rr}, & \bar{t}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2} t_{\varphi\varphi}, & \bar{t}_{\Theta\Theta} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} t_{\Theta\Theta}, \\ \bar{t}_{r\varphi} &= \frac{1}{r} t_{r\varphi}, & \bar{t}_{r\Theta} &= \frac{1}{r \sin \varphi} t_{r\Theta}, & \bar{t}_{\varphi\Theta} &= \frac{1}{r^2 \sin \varphi} t_{\varphi\Theta} \end{aligned} \right\} (6.7).$$

In (4.4), (4.5) und (6.6) ist jetzt

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \partial_\varphi (\sin \varphi \partial_\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \partial_{\Theta\Theta} \dots (6.8)$$

zu setzen. Einige Produktlösungen der Form $\Phi = f(r) g(\varphi) h(\Theta)$ von (4.4) sind durch

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{\mu + \frac{1}{2}}(a r), & \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{\mu + \frac{1}{2}}(b r) \\ g(\varphi) &= P_\mu^n(\cos \varphi), & h(\Theta) &= e^{\pm i n \Theta} \end{aligned}$$

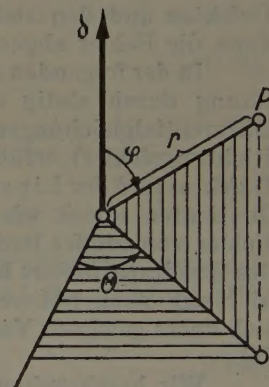
gegeben, wobei n, μ beliebige Konstanten sind, $Z_{\mu + \frac{1}{2}}$ Zylinderfunktionen und P_μ^n zugeordnete

Legendresche Funktionen erster oder zweiter Art bedeuten (vgl. [4]). Diese Liste ist jedoch wiederum nicht vollständig.

Literatur

- [1] K. Marguerre, „Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie“, Z. angew. Math. Mech., Bd. 35 (1955), S. 242–263.
- [2] A. Lichnerowicz, „Eléments de Calcul tensoriel“, Paris 1950.
- [3] A. Sommerfeld, „Mechanik der deformierbaren Medien“, Leipzig 1945.
- [4] J. Lense, „Kugelfunktionen“, Leipzig 1950.

Eingegangen vom 6. Februar 1956.



Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Von Werner Uhlmann in Hamburg

Es wurden Fehlerabschätzungen abgeleitet für stetig differenzierbare Näherungslösungen von Anfangswertaufgaben (System von s gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung), und zwar für jede der s Näherungslösungen einzeln. Dabei werden die Vorzeichen der Lipschitz-Konstanten soweit wie irgend möglich berücksichtigt. Vorher wird im 1. Abschnitt gezeigt, wie man diese Abschätzungen unmittelbar für das Adams'sche Interpolationsverfahren und das Verfahren der zentralen Differenzen benutzen kann.

Error estimation formulae are derived for approximate solutions of a system of s ordinary differential equations of the first order for given initial values when the approximate solution has a continuous derivative. The formulae apply separately to each of the s approximate solutions. In Section 1 it is shown how the estimation formulae may be used directly for the Adams process and for the central difference method.

Des évaluations des erreurs sont dérivées pour des solutions approximatives de problèmes de valeur initiale continuellement à différencier (système de s équations différentielles ordinaires du premier degré), c'est à dire individuellement pour chaque des s solutions approximatives. Dans ce cas les signes de la constante de Lipschitz sont mises en considération aussi bien que possible. Auparavant il est démontré dans le premier passage comment on peut appliquer des évaluations directement au procédé d'interpolation d'Adam et au procédé des différences centrales.

Выводятся оценки прогнессности для непрерывно дифференцируемых приближённых решений задачи Коши для системы s обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Оценки определяются отдельно для каждого из s решений, а там, где это возможно, учитываются знаки констант в условии Липшица. До этого, в разделе 1, было показано, каким образом можно воспользоваться полученными оценками в интерполяционном методе Адамса, а также в методе „центральных разностей“.

Einleitung

Eine Anfangswertaufgabe gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung sei näherungsweise durch ein Differenzenschema-Verfahren gelöst. Dann wurde bisher zur Fehlerabschätzung die exakte Lösung in die Differenzengleichung der Näherungslösung eingesetzt, die sie aber nur bis auf einen Defekt (hier gleich Quadraturfehler) erfüllt. Mit Hilfe dieses Defektes und den stets dem Betrage nach abgeschätzten Lipschitz-Quotienten wurden dann die Fehler abgeschätzt (siehe etwa [1]¹⁾).

In der folgenden Arbeit werden umgekehrt zunächst die diskreten Werte der Näherungslösung durch stetig differenzierbare Funktionen verbunden und in die ursprünglichen Differentialgleichungen eingesetzt. Diese werden nur bis auf einen Defekt (jetzt gleich Richtungsfehler) erfüllt. Die Fehlerabschätzungen werden dann unter Benutzung dieses Defektes und der Lipschitz-Quotienten durchgeführt, wobei die Vorzeichen der Lipschitz-Quotienten soweit wie möglich berücksichtigt werden, weil sie für die Größenordnung der Fehler von großer Bedeutung sind (siehe auch [2] und [3]). Statt der für die Abschätzung des Quadraturfehlers bisher auftretenden höheren Ableitungen der exakten Lösung werden hier nur noch höhere Ableitungen der Näherungslösung benutzt, und auch diese lassen sich unter gewissen Voraussetzungen durch die entsprechenden höheren Differenzen ersetzen [5].

Wir beschränken uns bei der Behandlung der Differenzenschema-Verfahren auf das Adams'sche Interpolationsverfahren und das Verfahren der zentralen Differenzen. Es sei aber ausdrücklich betont, daß die im 2. Abschnitt abgeleiteten Fehlerabschätzungen für beliebige stetig differenzierbare Näherungslösungen gelten, völlig unabhängig davon wie sie berechnet wurden.

Eine Übertragung der hier für Systeme entwickelten Methoden auf eine gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung folgt in einem weiteren ZAMM-Aufsatz²⁾.

Es werden nur reellwertige Funktionen reeller Variabler betrachtet.

1. Näherungslösung und Defekt

Vorgelegt sei die Anfangswertaufgabe

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i(x)}{dx} &= y'_i(x) = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_s(x)) \\ y_i(x_0) &= y_{i,0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.1) \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

¹⁾ Eckige Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

²⁾ Dieser und der vorliegende Aufsatz machen zusammen mit [5] die Dissertation des Verfassers aus, die unter dem Titel „Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen“ 1955 von der math.-naturw. Fakultät der Universität Hamburg genehmigt wurde (Referenten: Prof. Dr. L. Collatz, Prof. Dr. E. Sperner). Ich habe Herrn Prof. Dr. L. Collatz für die Anregung zu diesen Untersuchungen zu danken, die durchgeführt wurden im Rahmen eines Forschungsauftrages der deutschen Forschungsgemeinschaft.

wobei die Funktionen f_i nach jeder ihrer $(s+1)$ Variablen $(r+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar seien. Wir setzen $x_n = x_0 + n h$ ($h > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots, N+1$) und es möge für $x_0 \leq x \leq x_{N+1}$ eine eindeutig bestimmte Lösung $y_i(x)$ existieren. An den Stellen x_n seien Näherungswerte $\eta_{i,n}$ für die exakten Lösungen $y_i(x_n)$ berechnet. Zur Abkürzung setzen wir $f_{i,n} = f_i(x_n, \eta_{1,n}, \dots, \eta_{s,n})$.

1.1. Adamssches Interpolationsverfahren

Für $m+1 \leq n \leq N+1$ ($m \geq r-1$) seien die Werte $\eta_{i,n}$ nach dem Adamsschen Interpolationsverfahren r -ter Ordnung ($r > 1$) berechnet und es sei $P_{i,n}(x)$ das Polynom r -ten Grades mit $P_{i,n}(x_k) = f_{i,k}$ für $k = n+1-r, \dots, n+1$. Dann ist bekanntlich

$$\eta_{i,n+1} = \eta_{i,n} + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{i,n}(t) dt$$

und wir definieren nun für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ ($n = m, \dots, N$)

$$\eta_i(x) = \eta_{i,n} + \int_{x_n}^x P_{i,n}(t) dt \quad (1.2).$$

Die $\eta_i(x)$ sind dann stückweise Polynome $(r+1)$ -ten Grades und im ganzen Intervall $[x_m, x_{N+1}]$ einmal stetig differenzierbare Funktionen. Als Defekt $d_i(x)$ definieren wir:

$$d_i(x) = \eta'_i(x) - f'_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_s(x)) \quad (i = 1, \dots, s) \quad (1.3).$$

Aus (1.2) folgt für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$:

$$d_i(x) = P_{i,n}(x) - f'_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_s(x)).$$

Wir wollen Schranken $d_{i,M}$ für $|d_i(x)|$ aufstellen, und zwar zunächst nur für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. Dort sind die $\eta_i(x)$ und also auch $f_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_s(x))$ $(r+1)$ -mal stetig differenzierbar und es gibt also im Intervall $[x_{n+1-r}, x_{n+2}]$ sicher $(r+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktionen $g_i(x)$ mit $g_i(x) = f'_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_s(x))$ für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ und $g_i(x_k) = f'_{i,k}$ für $k = n+1-r, \dots, n+2$, wenn diese auch nicht eindeutig bestimmt sind. Dann ist nach der bekannten Abschätzung für Interpolationspolynome für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$:

$$|d_i(x)| \leq M_{r+1} h^{r+1} \cdot \max_{x_{n+1-r} \leq x \leq x_{n+1}} |g_i^{(r+1)}(x)| \quad (1.4),$$

wobei $M_r = \max_{r-1 \leq t \leq r} \left| \frac{(t-1)(t-2) \dots (t-r)}{r!} \right|$ ist.

Speziell ist: $M_2 = 0,125$, $M_3 = \frac{1}{27} \sqrt{3} \leq 0,0642$, $M_4 \leq 0,0417$.

Falls es aber eine Funktion $g_i(x)$ gibt, für die außerdem $g_i^{(r+1)}(x)$ im Intervall $[x_{n+1-r}, x_{n+2}]$ stets ≥ 0 oder stets ≤ 0 ist, so kann man dem Satz 1 der „kleinen Mitteilung“ [5] entnehmen, daß

$$|d_i(x)| \leq M_r |\nabla^{r+1} f_{i,n+2}| \quad (x_n \leq x \leq x_{n+1}) \quad (1.5)$$

ist, da ja $\nabla^{r+1} f_{n+2} = \nabla^{r+1} g_{n+2}$ ist.

Insgesamt können wir also feststellen, daß es Schranken $d_{i,M}$ gibt für alle x mit $x_m \leq x \leq x_N$:

$$|d_i(x)| \leq d_{i,M} \quad (1.6).$$

Weitere Abschätzungsmöglichkeiten insbesondere unter Berücksichtigung der eventuellen Abrundungsfehler findet man bei L. Vietoris [6].

1.2. Verfahren der zentralen Differenzen

Für die Anfangswertaufgabe (1.1) mit viermal stetig partiell differenzierbaren Funktionen f_i seien die Näherungswerte $\eta_{i,n}$ für $n = m+1, \dots, N+1$ ($m \geq 1$) nach dem Verfahren der zentralen Differenzen berechnet. Es sei $P_{i,n}(x)$ das Polynom zweiten Grades mit $P_{i,n}(x_k) = f_{i,k}$ für $k = n-1, n, n+1$. Wir definieren für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ ($n = m, \dots, N$)

$$\eta_i(x) = \eta_{i,n-1} + \int_{x_{n-1}}^x P_{i,n}(t) dt + \frac{c_{i,n}}{6 h^3} \int_{x_{n-1}}^x (t-x_{n-1})(t-x_n)(t-x_{n+1}) dt \quad (1.7)$$

mit

$$c_{i,n} = -12 \frac{\eta_{i,n+1} - 2\eta_{i,n} + \eta_{i,n-1}}{h} + 6(f_{i,n+1} - f_{i,n-1})$$

Die $\eta_i(x)$ sind so stückweise Polynome vierten Grades, und durch die Glieder mit $c_{i,n}$ haben wir erreicht, daß $\eta_i(x)$ durch die diskreten Näherungswerte $\eta_{i,n}$ hindurchgeht. Für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ ist

$$\frac{d\eta_i(x)}{dx} = P_{i,n}(x) + \frac{c_{i,n}}{6h^3} (x - x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n+1})$$

und also speziell $\left. \frac{d\eta_i(x)}{dx} \right|_{x=x_k} = f_{i,k}$ für $k = n, n+1$ und also sind die $\eta_i(x)$ im ganzen Intervall $[x_m, x_{N+1}]$ einmal stetig differenzierbare Funktionen.

Die Defekte werden wieder wie in (1.3) definiert, nur ist hier für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$:

$$d_i(x) = P_{i,n}(x) - f_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_s(x)) + \frac{c_{i,n}}{6h^3} (x - x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n+1}).$$

Die Abschätzung von $|P_{i,n}(x) - f_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_s(x))|$ ist ersichtlich gegeben durch (1.4) für $r = 2$.

Definiert man aber $g_i(x)$ im Intervall $[x_{n-2}, x_{n+2}]$ mit $g_i(x) = f_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_s(x))$ für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ und $g_i(x_k) = f_{i,k}$ für $k = n-2, \dots, n+2$ und ist dort $g_i^{IV}(x)$ stets ≥ 0 oder stets ≤ 0 , so besagt der Beweis zu Satz 2 der „kleinen Mitteilung“ [5], daß $f_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_s(x))$ für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ zwischen den beiden Polynomen

$$P_{i,n}(x) + \frac{1}{6h^3} (x - x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n+1}) \nabla^3 f_{i,n+1}$$

und

$$P_{i,n}(x) + \frac{1}{6h^3} (x - x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n+1}) \nabla^3 f_{i,n+2}$$

verläuft. Also ist dann

$$|d_i(x)| \leq \frac{1}{6h^3} |(x - x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n+1})| \text{Max} \{ |\nabla^3 f_{i,n+1} - c_{i,n}|, |\nabla^3 f_{i,n+2} - c_{i,n}| \}$$

und weiter

$$|d_i(x)| \leq M_3 \cdot \text{Max} \{ |\nabla^3 f_{i,n+1} - c_{i,n}|, |\nabla^3 f_{i,n+2} - c_{i,n}| \}.$$

Auch hier können wir also schließlich feststellen, daß (1.6) gilt.

2. Fehlerabschätzungen

Dieser Abschnitt gilt unabhängig vom ersten Abschnitt.

2.1. System von endlich vielen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Vorgelegt sei die Anfangswertaufgabe

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i(x)}{dx} &= y'_i(x) = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_s(x)) \\ y_i(x_0) &= y_{i,0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.1).$$

Für $x_0 \leq x \leq x_N$ existiere eine eindeutig bestimmte Lösung $y_1(x), \dots, y_s(x)$. Für $x_0 \leq x_m \leq x \leq x_N$ sei eine einmal stetig differenzierbare Näherungslösung $\eta_1(x), \dots, \eta_s(x)$ berechnet und für die Defekte

$$d_i(x) = \eta'_i(x) - f_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_s(x)) \dots \dots \dots (2.2)$$

mögen Schranken $d_{i,M}$ existieren:

$$|d_i(x)| \leq d_{i,M} \quad \text{für} \quad x_m \leq x \leq x_N \dots \dots \dots (2.3).$$

Diese Voraussetzungen sind insbesondere für die Näherungslösungen erfüllt, die im 1. Abschnitt behandelt wurden.

Wir definieren als Fehler

$$\varepsilon_i(x) = \eta_i(x) - y_i(x) \dots \dots \dots (2.4)$$

und für die Anfangsfehler seien Schranken bekannt:

$$|\varepsilon_i(x_m)| \leq E_i \dots \dots \dots (2.5).$$

Wir definieren die Lipschitz-Quotienten $L_{i,k}(x)$ durch $(i, k = 1, 2, \dots, s)$

$$L_{i,k}(x) = \frac{f_i(x, y_1(x), \dots, y_{k-1}(x), \eta_k(x), \dots, \eta_s(x)) - f_i(x, y_1(x), \dots, y_k(x), \eta_{k+1}(x), \dots, \eta_s(x))}{\eta_k(x) - y_k(x)} \quad (2.6)$$

und setzen voraus, daß sie für $x_M \leq x \leq x_N$ stetig und also auch beschränkt sind:

$$l_{ik} \leq L_{ik}(x) \leq L_{ik} \quad \text{und} \quad |L_{ik}(x)| \leq K_{ik} = \text{Max} \{|l_{ik}|, |L_{ik}|\} \dots \dots (2.7).$$

Aus (2.1) und (2.6) folgt durch elementare Rechnung:

$$\varepsilon'_i(x) = \sum_{k=1}^s L_{ik}(x) \cdot \varepsilon_k(x) + d_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, s) \dots \dots (2.8).$$

Auf dieses Differentialgleichungssystem gründen sich alle folgenden Fehlerabschätzungen. Um möglichst gute, d. h. nicht zu grobe Abschätzungen zu erhalten, ist es das erst teilweise erreichte Ziel, die Vorzeichen der $L_{ik}(x)$ soweit zu berücksichtigen, wie sie für die Lösung von (2.8) im Falle konstanter Koeffizienten eine Rolle spielen würden, d. h. also soweit sie die charakteristischen Zahlen der Matrix (L_{ik}) beeinflussen.

Die erste Abschätzung — mit verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwand — berücksichtigt nur die Vorzeichen der Diagonalelemente. Wir setzen

$$\varepsilon_i(x) = e^{-\alpha(x-x_m)} u_i(x)$$

mit α beliebig, aber $\alpha \geq \text{Max}_i K_{ii}$ (weil dann $|L_{ii}(x) + \alpha| \leq L_{ii} + \alpha$). Es ist

$$\left. \begin{aligned} u'_i(x) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s L_{ik}(x) u_k(x) + (L_{ii}(x) + \alpha) u_i(x) + e^{\alpha(x-x_m)} d_i(x) \\ u_i(x_m) &= \varepsilon_i(x_m) \end{aligned} \right\} \dots \dots (2.9).$$

Wir betrachten daneben für $x \geq x_m$ und $i = 1, 2, \dots, s$:

$$z'_i(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s K_{ik} z_k(x) + (L_{ii} + \alpha) z_i(x) + e^{\alpha(x-x_m)} d_{i,M} \dots \dots (2.10).$$

Jede Lösung von (2.10) läßt sich schreiben in der Form

$$z_i(x) = z_{i,0}(x) + \sum_{k=1}^s z_k(x_m) z_{i,k}(x) \dots \dots (2.11)$$

wobei $z_{i,0}(x)$ Lösung des inhomogenen, alle anderen $z_{i,k}(x)$ Lösungen des zugehörigen homogenen Systems von (2.10) sind und wobei $z_{i,k}(x_m) = \delta_{i,k}$ ($i = 1, 2, \dots, s$; $k = 0, 1, \dots, s$) ist. Wir wollen zeigen, daß alle $z_{i,k}(x) \geq 0$ sind. Zum Beweis setzen wir

$$z_{i,k}^{(0)}(x) = z_{i,k}(x_m)$$

und

$$z_{i,k}^{(\mu+1)}(x) = z_{i,k}(x_m) + \int_{x_m}^x \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s K_{ij} z_{j,k}^{(\mu)}(t) + (L_{ii} + \alpha) z_{i,k}^{(\mu)}(t) + \delta_{\sigma,k} e^{\alpha(t-x_m)} d_{i,M} \right\} dt.$$

Dann ist nach dem Iterationsbeweis zum Satz von Picard-Lindelöf $\lim_{\mu \rightarrow \infty} z_{i,k}^{(\mu)}(x) = z_{i,k}(x)$, und durch vollständige Induktion folgt, daß alle $z_{i,k}^{(\mu)}(x) \geq 0$ und also auch $z_{i,k}(x) \geq 0$ sind.

Wir bezeichnen mit $u_{i,0}(x)$ die Lösung von (2.10) mit $u_{i,0}(x_m) = \varepsilon_i(x_m)$ und mit $U_i(x)$ die Lösung von (2.10) mit $U_i(x_m) = E_i$. Wir setzen weiter für $\mu = 0, 1, 2, \dots$ und $x_m \leq x \leq x_N$:

$$u_{i,\mu+1}(x) = \varepsilon_i(x_m) + \int_{x_m}^x \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s L_{ik}(t) u_{k,\mu}(t) + (L_{ii}(t) + \alpha) u_{i,\mu}(t) + e^{\alpha(t-x_m)} d_i(t) \right\} dt.$$

Durch vollständige Induktion folgt, daß

$$|u_{i,\mu}(x)| \leq U_i(x) \quad (i = 1, \dots, s; \mu = 0, 1, 2, \dots)$$

ist; denn da alle $z_{i,k}(x) \geq 0$ sind, folgt die Verankerung für $\mu = 0$ aus (2.11); und der Schritt von μ auf $(\mu + 1)$ ergibt sich so:

$$|u_{i,\mu+1}(x)| \leq E_i + \int_{x_m}^x \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s K_{ik} U_k(t) + (L_{ii} + \alpha) U_i(t) + e^{\alpha(t-x_m)} d_{i,M} \right\} dt = U_i(x).$$

Wieder folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, daß $\lim_{\mu \rightarrow \infty} u_{i,\mu}(x) = u_i(x)$ ist; und also ist $|u_i(x)| \leq U_i(x)$. Wir setzen nun

$$E_i(x) = e^{-\alpha(x-x_m)} U_i(x)$$

und erhalten:

$$|\varepsilon_i(x)| = |u_i(x) e^{-\alpha(x-x_m)}| \leq U_i(x) e^{-\alpha(x-x_m)} = E_i(x).$$

Aus der Definition von $U_i(x)$ folgt damit

Satz 1: Für $x_m \leq x \leq x_N$ und $i = 1, 2, \dots, s$ ist

$$|\varepsilon_i(x)| \leq E_i(x),$$

wobei die $E_i(x)$ eindeutig bestimmt sind als Lösung der Anfangswertaufgabe

$$E'_i(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s K_{ik} E_k(x) + L_{ii} E_i(x) + d_{i,M}, \quad E_i(x_m) = E_i.$$

Eine Verbesserungsmöglichkeit dieser Fehlerabschätzung ergibt sich durch vorherige Anwendung einer linearen Transformation. Wir setzen:

$$\varepsilon_i(x) = \sum_{k=1}^s a_{ik} v_k(x) \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (2.12),$$

wobei die a_{ik} beliebige reelle Zahlen, aber $\det(a_{ik}) \neq 0$ ist. Dann folgt aus (2.8):

$$v'_i(x) = \sum_{k=1}^s \tilde{L}_{ik}(x) v_k(x) + \tilde{d}_i(x),$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} (b_{ik}) &= (a_{ik})^{-1}, \quad \tilde{L}_{ik}(x) = \sum_{\nu, \mu=1}^s b_{i\nu} L_{\nu\mu}(x) a_{\mu k}, \\ \tilde{d}_i(x) &= \sum_{\nu=1}^s b_{i\nu} d_\nu(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.13).$$

Es sei nun

$$|v_i(x_m)| = \left| \sum_{k=1}^s b_{ik} \varepsilon_k(x_m) \right| \leq V_i \quad (2.14),$$

$$|\tilde{L}_{ik}(x)| \leq \tilde{K}_{ik}, \quad \tilde{L}_{ii}(x) \leq \tilde{L}_{ii}, \quad |\tilde{d}_i(x)| \leq \tilde{d}_{i,M} \quad (2.15).$$

Wir definieren $V_i(x)$ als eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe

$$V'_i(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s \tilde{K}_{ik} V_k(x) + \tilde{L}_{ii} V_i(x) + \tilde{d}_{i,M}; \quad V_i(x_m) = V_i.$$

Aus Satz 1 folgt, daß $|v_i(x)| \leq V_i(x)$ ist; und aus (2.12):

Satz 2: Für $x_m \leq x \leq x_N$ und $i = 1, 2, \dots, s$ ist

$$|\varepsilon_i(x)| \leq \tilde{E}_i(x) = \sum_{k=1}^s |a_{ik}| V_k(x).$$

Diese Abschätzung weist gegenüber Satz 1 Vergrößerungen auf, weil man genötigt ist, bei (2.14) und Satz 2 die Beträge der b_{ik} bzw. a_{ik} zu nehmen. Außerdem ist der Arbeitsaufwand erheblich größer. Sie hat aber — wenn sie für größere x -Intervalle benutzt wird — den entscheidenden Vorteil, daß man durch geschickte, noch anzugebende Wahl von (a_{ik}) die im Anschluß an (2.8) aufgestellte Forderung für Fehlerabschätzungen weitgehend erfüllen kann. Es bleibt aber jedem Einzelfall vorbehalten, Vor- und Nachteile gegeneinander abzuwägen.

Wir führen nun zunächst die nur aus reellen Konstanten bestehende Matrix $(\tilde{\tilde{L}}_{ik})$ ein; und zwar sei $\tilde{\tilde{L}}_{ik}$ jeweils ungefähr gleich einem mittleren Funktionswert von $L_{ik}(x)$. Dann ist es günstig (a_{ik}) zu wählen entsprechend

Satz 3: Zu jeder beliebigen reellen Matrix $(\tilde{\tilde{L}}_{ik})$ gibt es stets mindestens eine reelle, nicht-singuläre Matrix (a_{ik}) derart, daß $J = (a_{ik})^{-1} (\tilde{\tilde{L}}_{ik}) (a_{ik})$ eine Normalform der folgenden Gestalt ist:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \\ 0 & J_2 & 0 & \\ 0 & 0 & J_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die 0 rechteckige Matrizen, deren Elemente alle = 0 sind und die J_ν reelle, quadratische Matrizen folgender vier Formen

$$(\gamma_\mu), \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \gamma_\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_e & -\beta_e^2 \\ 1 & \alpha_e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_e & -\beta_e^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_e & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & & & \alpha_e & -\beta_e^2 \\ 0 & 0 & & & 1 & \alpha_e \end{pmatrix}.$$

Die γ_μ sind die reellen und die $\alpha_e \pm i\beta_e$ ($\beta_e \neq 0$) die komplexen charakteristischen Wurzeln von (\tilde{L}_{ik}) . Dieselbe charakteristische Zahl kann in mehreren der J_ν vorkommen.

Anmerkung 1: J stimmt ersichtlich mit der Jordanschen Normalform überein, falls alle charakteristischen Zahlen reell sind.

Anmerkung 2: Benutzt man die Matrix (a_{ik}) , so werden — falls alle charakteristischen Zahlen reell sind — in (2.15) nur Größen $L_{ik}(x)$ dem Betrag nach abgeschätzt, die ungefähr = 0 oder = +1 sind, d. h. aber, diese Abschätzungen stellen sicher keine unnötigen Vergrößerungen dar. Im Falle komplexer charakteristischer Zahlen trifft das allerdings leider nicht zu für die $-\beta_e^2$. Diese Schwierigkeit ist im allgemeinen Fall noch nicht überwunden, wohl aber für Spezialfälle.

Beweis für Satz 3: Wir benutzen Bezeichnungen und Sätze von [4] und nennen also zwei Matrizen A und B komplex (reell) äquivalent, wenn es eine komplexe (reelle), nicht-singuläre Matrix T gibt mit $A = T^{-1}BT$.

Es genügt zu zeigen, daß die reellen Matrizen (\tilde{L}_{ik}) und J komplex äquivalent sind, denn dann haben ihre jeweiligen charakteristischen Matrizen $((\tilde{L}_{ik}) - xE)$ und $(J - xE)$ dieselben Elementarteiler (mit reellen Koeffizienten) und also sind (\tilde{L}_{ik}) und J auch reell äquivalent.

Wir transformieren nun (\tilde{L}_{ik}) mittels T_1 auf die Jordansche Normalform $L_I = T_1^{-1}(\tilde{L}_{ik})T_1$. Für die konjugiert komplexe Matrix \bar{T}_1 hat dann auch $\bar{T}_1^{-1}(\tilde{L}_{ik})\bar{T}_1$ Jordansche Normalform und da diese bis auf die Reihenfolge der Diagonalkästchen eindeutig bestimmt ist, ist in L_I die Anzahl der σ -reihigen Kästchen ($\sigma \geq 1$)

$$\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \alpha + i\beta \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$$

einander gleich für jede komplexe charakteristische Wurzel.

Da zwei Matrizen, die durch gleichzeitige Vertauschung zweier Zeilen und zweier Spalten derselben Nummer auseinander hervorgehen, äquivalent sind, sind es auch die folgenden beiden 2σ -reihigen Matrizen ($\sigma \geq 1$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha + i\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 & \alpha - i\beta & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & & & \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}.$$

Weiter ist für $\beta \neq 0$: $A_3 = T_2^{-1}A_2T_2$, wobei

$$A_3 = \begin{pmatrix} \alpha - \beta^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & & & \alpha - \beta^2 & \\ 0 & 0 & & & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & i\beta & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & 2 & & \\ & & 1 & i\beta \\ & & i & 1 \\ 0 & 0 & 2\beta & 2 \end{pmatrix}.$$

Fassen wir nun jedes Diagonalkästchen in L_I mit einer komplexen charakteristischen Wurzel $(\alpha_e + i\beta_e)$ zusammen mit dem entsprechenden Kästchen von $(\alpha_e - i\beta_e)$ zu einem größeren Kästchen der Form A_1 , so folgt sofort, daß man L_I und damit auch (\tilde{L}_{ik}) auf die Gestalt J transformieren kann.

2.2. System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung

Es werden die Fehlerabschätzungen des vorigen Abschnittes explizit angegeben und einige weitere Abschätzungen hinzugefügt. Betrachtet man die charakteristischen Wurzeln von (\tilde{L}_{ik}) , so sieht man, daß es nicht auf die Vorzeichen von L_{12} und L_{21} einzeln, sondern nur auf das von $L_{12} L_{21}$ ankommt.

2.2.1. Der Fall $L_{12} L_{21} \geq 0$

Die folgende Fehlerabschätzung gilt immer; sie läßt aber nur günstige Ergebnisse erwarten, falls $L_{12}(x) L_{21}(x) \geq 0$ oder doch wenigstens nicht zu stark negativ ist. Wir benutzen wörtlich Satz 1, rechnen allerdings die $E_i(x)$ explizit aus, um eine schnelle Anwendung zu ermöglichen. Dazu führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\Delta = L_{11} L_{22} - K_{12} K_{21}, \quad K = +\sqrt{\frac{1}{4}(L_{11} - L_{22})^2 + K_{12} K_{21}}, \quad s_{1,2} = \frac{1}{2}(L_{11} + L_{22}) \pm K \quad (2.16).$$

Für $\Delta = 0$ ist $K = \frac{1}{2}|L_{11} + L_{22}|$.

Satz 4: Für $x_m \leq x \leq x_N$ und $i = 1, 2$ ist $|e_i(x)| \leq E_i(x)$.

Dabei ist für $i = 1, 2$; $k = 1, 2$ aber $i \neq k$:

$$E_i(x) = E_i \frac{1}{2K} \{ [s_1 - L_{kk}] e^{s_1(x-x_m)} + [L_{kk} - s_2] e^{s_2(x-x_m)} \} + E_k \frac{K_{ik}}{2K} \{ e^{s_1(x-x_m)} - e^{s_2(x-x_m)} \} \\ + d_{i,M} \frac{1}{2KA} \{ s_2(s_1 - L_{kk}) e^{s_1(x-x_m)} + s_1(L_{kk} - s_2) e^{s_2(x-x_m)} - 2KL_{kk} \} \\ + d_{k,M} \frac{K_{ik}}{2KA} \{ s_2 e^{s_1(x-x_m)} - s_1 e^{s_2(x-x_m)} + 2K \} \quad \text{falls } \Delta \neq 0, K > 0.$$

$$E_i(x) = E_i \frac{1}{L_{11} + L_{22}} \{ L_{kk} + L_{ii} e^{(L_{11}+L_{22})(x-x_m)} \} + E_k \frac{K_{ik}}{L_{11} + L_{22}} \{ e^{(L_{11}+L_{22})(x-x_m)} - 1 \} \\ + d_{i,M} \frac{1}{(L_{11} + L_{22})^2} \{ L_{kk}(L_{11} + L_{22})(x-x_m) + L_{ii}(e^{(L_{11}+L_{22})(x-x_m)} - 1) \} \\ + d_{k,M} \frac{K_{ik}}{(L_{11} + L_{22})^2} \{ -(L_{11} + L_{22})(x-x_m) + (e^{(L_{11}+L_{22})(x-x_m)} - 1) \} \quad \text{falls } \Delta = 0, K > 0.$$

$$E_i(x) = E_i e^{L_{11}(x-x_m)} + E_k K_{ik}(x-x_m) e^{L_{11}(x-x_m)} + d_{i,M} \frac{1}{L_{11}} (e^{L_{11}(x-x_m)} - 1) \\ + d_{k,M} \frac{K_{ik}}{L_{11}} \{ (x-x_m) e^{L_{11}(x-x_m)} - \frac{1}{L_{11}} (e^{L_{11}(x-x_m)} - 1) \} \quad \text{falls } \Delta \neq 0, K = 0$$

und also $L_{11} = L_{22}$ und $K_{12} K_{21} = 0$.

$$E_i(x) = E_i + E_k K_{ik}(x-x_m) + d_{i,M}(x-x_m) + d_{k,M} K_{ik} \frac{(x-x_m)^2}{2} \quad \text{falls } \Delta = 0, K = 0$$

und also $L_{11} = L_{22} = 0$ und $K_{12} K_{21} = 0$.

2.2.2. Der Fall $L_{12} L_{21} \leq 0$

Die folgende Fehlerabschätzung gilt — abgesehen von der wenig einschränkenden Voraussetzung (2.18) — immer; sie ist jedoch gegenüber Satz 4 höchstens dann günstiger, wenn $L_{12}(x) L_{21}(x) \leq 0$ ist.

Wir führen ein für $x_m \leq x \leq x_N$

$$l_{00} \leq \frac{1}{2}(L_{22}(x) - L_{11}(x)) \leq L_{00}, \quad \hat{L}_0 = \frac{1}{2}(l_{00} + L_{00}), \quad \hat{L}_{12} = \frac{1}{2}(l_{12} + L_{12}) \dots \quad (2.17)$$

und setzen voraus:

$$\hat{L}_{12} \neq 0 \dots \dots \dots (2.18).$$

Wir wählen die Transformationsmatrix für Satz 2 etwas anders als im allgemeinen Fall des Satzes 3 empfohlen ist, nämlich

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} \hat{L}_{12} & 0 \\ \hat{L}_{00} & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist dann

$$(b_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hat{L}_{12} & \hat{L}_{00} \\ -\hat{L}_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} |v_1(x_m)| &\leq V_1 = \left| \frac{1}{\hat{L}_{12}} \right| E_1 & |v_2(x_m)| &\leq V_2 \leq \left| \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_{12}} \right| E_1 + E_2 \\ \tilde{L}_{11}(x) &= L_{11}(x) + \frac{L_{12}(x)}{\hat{L}_{12}} \hat{L}_{00} \leq \tilde{L}_{11} & |\tilde{L}_{12}(x)| &= \left| \frac{L_{12}(x)}{\hat{L}_{12}} \right| \leq \tilde{K}_{12} \\ |\tilde{L}_{21}(x)| &= \left| \hat{L}_{00} (L_{22}(x) - L_{11}(x)) - \hat{L}_{00}^2 \frac{L_{12}(x)}{\hat{L}_{12}} + \hat{L}_{12} L_{21}(x) \right| \leq \tilde{K}_{21} \\ \tilde{L}_{22}(x) &= L_{22}(x) - \frac{L_{12}(x)}{\hat{L}_{12}} \hat{L}_{00} \leq \tilde{L}_{22} \\ |\tilde{d}_1(x)| &= \left| \frac{1}{\hat{L}_{12}} d_1(x) \right| \leq \frac{d_{1,M}}{|\hat{L}_{12}|} = \tilde{d}_{1,M} & |\tilde{d}_2(x)| &= \left| d_2(x) - \frac{\hat{L}_{00}}{\hat{L}_{12}} d_1(x) \right| \leq \tilde{d}_{2,M}. \end{aligned}$$

Im übrigen gilt die Fehlerabschätzung des Satzes 2. Wegen der völligen Gleichartigkeit der Schranken $V_i(x)$ mit den Schranken $E_i(x)$ aus Satz 4 erübrigt sich eine explizite Angabe.

2.2.3. Der Fall $L_{11}(x) = \text{const}$

Im Falle komplexer charakteristischer Zahlen von (\tilde{L}_{ik}) , d. h. im Falle $(\tilde{L}_{11} - \tilde{L}_{22})^2 + 4 \tilde{L}_{12} \tilde{L}_{21} < 0$ sind weitere Verbesserungen wünschenswert. Leider ist dies aber nur für $L_{11}(x) = \text{const}$ gelungen. Wir setzen also für $x_m \leq x \leq x_N$ und $x_m \leq t \leq x_N$ voraus:

$$l_{11} = L_{11}(x) = L_{11} \quad \text{und} \quad L_{12}(x) L_{21}(t) \leq 0 \quad \dots \dots \dots (2.19).$$

Wir definieren x^* durch

$$x^* - x_m = \begin{cases} \infty & \text{falls } K_{12} K_{21} = 0 \\ \frac{2}{+ \sqrt{K_{12} K_{21}}} & \text{falls } K_{12} K_{21} \neq 0, \quad L_{11} = L_{22} \\ \frac{1}{L_{11} - L_{22}} \ln \left(1 + \frac{L_{11} - L_{22}}{+ \sqrt{K_{12} K_{21}}} \right)^2 & \text{falls } K_{12} K_{21} \neq 0, \quad L_{11} \neq L_{22} \end{cases} \quad \dots \dots (2.20).$$

Dann ist für $x_m \leq \xi \leq x \leq x^*$

$$K_{12} K_{21} \int_{\xi_m}^x \int_{x_m}^{\xi} e^{(L_{11} - L_{22})(z-t)} dt dz \leq 1 \quad \dots \dots \dots (2.21).$$

Beweis: Für $K_{12} K_{21} = 0$ trivial. Sei also $K_{12} K_{21} \neq 0$. Dann wird x durch x^* ersetzt; die linke Seite nimmt ihr Maximum an für $\xi = \frac{1}{2}(x_m + x^*)$ und mit der Definition von x^* rechnet man leicht nach, daß (2.20) gilt.

Wir transformieren nun

$$\varepsilon_i(x) = e^{L_{ii} \cdot (x - x_m)} u_i(x) \quad (i = 1, 2) \quad \dots \dots \dots (2.22).$$

Dann folgt aus (2.8) durch Einsetzen und Integration ($\xi_1 \geq x_m$)

$$u_1(x) = u_1(\xi_1) + \int_{\xi_1}^x \{ L_{12}(t) e^{(L_{11} - L_{11})(t - x_m)} u_2(t) + e^{-L_{11} \cdot (t - x_m)} d_1(t) \} dt \quad \dots \dots \dots (2.23),$$

$$u_2(x) = u_2(\xi_1) + \int_{\xi_1}^x \{ L_{21}(t) e^{(L_{11} - L_{11})(t - x_m)} u_1(t) + (L_{22}(t) - L_{22}) u_2(t) + e^{-L_{22} \cdot (t - x_m)} d_2(t) \} dt \quad (2.24).$$

Wir behaupten für $x_m \leq x \leq \text{Min}(x_N, x^*)$:

$$|u_2(x)| \leq U_2(x) = E_1 K_{21} \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{(L_{11}-L_{22})t} dt + E_2 + d_{1,M} K_{21} \int_{\sigma}^{x-x_m} \int_{\sigma}^z e^{(L_{11}-L_{22})z} e^{-L_{11}t} dt dz \\ + d_{2,M} \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{-L_{22}t} dt \dots \dots \dots (2.25).$$

Beweis: 1. Sei $u_2(t) \geq 0$ für $x_m \leq t \leq x$ ($u_2(t) \leq 0$ geht genau so). Man setzt (2.23) in (2.24) ein und wählt $\xi_1 = x_m$. Die Behauptung folgt durch einfaches Abschätzen.

2. Wäre (2.25) falsch, so müßte es nach 1. ein x und ein ξ_2 geben mit $|u_2(t)| \leq U_2(t)$ für $x_m \leq t \leq \xi_2$, $u_2(\xi_2) = 0$, $u_2(t) \neq 0$ für $\xi_2 < t \leq x$ und $|u_2(x)| > U_2(x)$. Man wählt hier $\xi_1 = \xi_2$ und kann damit wie eben durch elementare Rechnung zeigen, daß doch $|u_2(x)| < U_2(x)$ und damit die Annahme falsch ist.

Aus (2.23) und (2.25) folgt sofort für $\xi_1 = x_m$:

$$|u_1(x)| \leq U_1(x) = E_1 + d_{1,M} \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{-L_{11}t} dt + K_{12} \int_{x_m}^x e^{(L_{22}-L_{11})(t-x_m)} U_2(t) dt.$$

Unter Berücksichtigung von (2.22) haben wir damit bewiesen:

Satz 5: Unter der Voraussetzung (2.19) ist für $x_m \leq x \leq \text{Min}(x_N, x^*)$:

$$|\varepsilon_1(x)| \leq \tilde{E}_1(x) = E_1 e^{L_{11} \cdot (x-x_m)} + d_{1,M} \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{L_{11}t} dt + K_{12} e^{L_{11} \cdot (x-x_m)} \int_{x_m}^x e^{-L_{11} \cdot (t-x_m)} \tilde{E}_2(t) dt \\ |\varepsilon_2(x)| \leq \tilde{E}_2(x) = E_1 K_{21} e^{L_{22} \cdot (x-x_m)} \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{(L_{11}-L_{22})t} dt + E_2 e^{L_{22} \cdot (x-x_m)} \\ + d_{1,M} K_{21} e^{L_{22} \cdot (x-x_m)} \int_{\sigma}^{x-x_m} \int_{\sigma}^z e^{(L_{11}-L_{22})z} e^{-L_{11}t} dt dz + d_{2,M} \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{L_{22}t} dt.$$

Auf eine explizite Ausrechnung der elementaren Integrale müssen wir aus Platzmangel verzichten. Ist auch $L_{22}(x) = \text{const}$, kann man natürlich auch für $\varepsilon_1(x)$ die günstigere Abschätzung $\tilde{E}_2(x)$ unter Vertauschung der Indizes benutzen.

Es liegt nahe, den günstigen Bereich dieser Abschätzung zu erweitern durch vorherige Anwendung einer linearen Transformation. Das geht aber nur, wenn die Eigenschaft „ $L_1(x) = \text{const}$ “ erhalten bleibt, was für $L_{12}(x) = \text{const}$ oder $L_{21}(x) = \text{const}$ der Fall ist. Setzen wir also zunächst für $x_m \leq x \leq x_N$ voraus:

$$l_{11} = L_{11}(x) = L_{11}, \quad l_{12} = L_{12}(x) = L_{12} \neq 0 \dots \dots \dots (2.26),$$

$$-\bar{K}_{21} \leq \bar{L}_{21}(x) = \frac{1}{4} (L_{11} - L_{22}) (L_{11} + L_{22} - 2 L_{22}(x)) + L_{12} L_{21}(x) \leq 0 \dots \dots (2.27).$$

Die Voraussetzung (2.26) ist so einschneidend, daß die Anwendungsmöglichkeit der folgenden Fehlerabschätzung nur gering ist; aber es dürfte doch von Interesse sein, die Tragweite der Methoden überhaupt überblicken zu können.

Wir setzen

$$\varepsilon_1(x) = L_{12} \bar{v}_1(x), \quad \varepsilon_2(x) = -\frac{1}{2} (L_{11} - L_{22}) \bar{v}_1(x) + \bar{v}_2(x) \dots \dots \dots (2.28).$$

Dann ist

$$\bar{v}_1'(x) = \frac{1}{2} (L_{11} + L_{22}) \bar{v}_1(x) + \bar{v}_2(x) + \frac{1}{L_{12}} d_1(x) \\ \bar{v}_2'(x) = \bar{L}_{21}(x) \bar{v}_1(x) + \frac{1}{2} (L_{11} + 2 L_{22}(x) - L_{22}) \bar{v}_2(x) + \frac{L_{11} - L_{22}}{2 L_{12}} d_1(x) + d_2(x)$$

und

$$|\bar{v}_1(x_m)| \leq \left| \frac{1}{L_{12}} \right| E_1, \quad |\bar{v}_2(x_m)| \leq \frac{L_{11} - L_{22}}{2 L_{12}} E_1 + E_2.$$

Nach Satz 5 können wir $|\bar{v}_i(x)|$ abschätzen durch $\bar{V}_i(x)$, wobei für (2.20) nur die ersten beiden Fälle in Frage kommen, da $\frac{1}{2} (L_{11} + 2 L_{22}(x) - L_{22}) \leq \frac{1}{2} (L_{11} + L_{22})$. Aus (2.28) folgt damit:

Satz 6: Für $x_m \leq x \leq \text{Min} \left\{ x_N, x_m + \frac{2}{\sqrt{\bar{K}_{21}}} \right\}$ ist unter der Voraussetzung (2.26), (2.27)

$$|\varepsilon_1(x)| \leq \bar{E}_1(x) = |L_{12}| \bar{V}_1(x), \quad |\varepsilon_2(x)| \leq \bar{E}_2(x) = \frac{1}{2} |L_{11} - L_{22}| \bar{V}_1(x) + \bar{V}_2(x),$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(x) &= E_1 \frac{1}{|L_{12}|} e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} + d_{1,M} \frac{1}{|L_{12}|} \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}t} dt \\ &\quad + e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} \int_{x_m}^x e^{-\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(t-x_m)} \bar{V}_2(t) dt, \\ \bar{V}_2(x) &= \frac{1}{|L_{12}|} E_1 \bar{K}_{21} e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} (x-x_m) + \left| \frac{L_{11}-L_{22}}{2 L_{12}} \right| E_1 e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} + E_2 e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} \\ &\quad + d_{1,M} \frac{\bar{K}_{21}}{|L_{12}|} e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} \int_{\sigma}^{x-x_m} \int_{\sigma}^z e^{-\frac{L_{11}+L_{22}}{2}t} dt dz + \left\{ \left| \frac{L_{11}-L_{22}}{2 L_{12}} \right| d_{1,M} + d_{2,M} \right\} \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}t} dt. \end{aligned}$$

Schließlich bleibt noch eine Fehlerabschätzung abzuleiten unter der Voraussetzung:

$$\left. \begin{aligned} l_{11} &= L_{11}(x) = L_{11}, \quad l_{21} = L_{21}(x) = L_{21} \neq 0, \\ -\bar{K}_{12} &\leq \bar{L}_{12}(x) = \frac{1}{4} (L_{11} - L_{22}) (L_{11} - 2 L_{22}(x) + L_{22}) + L_{12}(x) L_{21} \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (2.29).$$

Wir setzen hier

$$\varepsilon_1(x) = \bar{v}_1(x) + \frac{1}{2} (L_{11} - L_{22}) \bar{v}_2(x), \quad \varepsilon_2(x) = L_{21} \bar{v}_2(x) \dots \dots (2.30).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{v}_1'(x) &= \frac{1}{2} (L_{11} + L_{22}) \bar{v}_1(x) + \bar{L}_{12}(x) \bar{v}_2(x) + d_1(x) - \frac{L_{11} - L_{22}}{2 L_{21}} d_2(x) \\ \bar{v}_2'(x) &= \bar{v}_1(x) + \frac{1}{2} (L_{11} + 2 L_{22}(x) - L_{22}) \bar{v}_2(x) + \frac{1}{L_{21}} d_2(x) \end{aligned}$$

und

$$|\bar{v}_1(x_m)| \leq E_1 + \left| \frac{L_{11} - L_{22}}{2 L_{21}} \right| E_2, \quad |\bar{v}_2(x_m)| \leq \frac{1}{|L_{21}|} E_2.$$

Ganz analog zu Satz 6 folgt aus Satz 5:

Satz 7: Für $x_m \leq x \leq \text{Min} \left\{ x_N, x_m + \frac{2}{\sqrt{\bar{K}_{12}}} \right\}$ ist unter der Voraussetzung (2.29)

$$|\varepsilon_1(x)| \leq \bar{\bar{V}}_1(x) + \frac{1}{2} |L_{11} - L_{22}| \bar{\bar{V}}_2(x), \quad |\varepsilon_2(x)| \leq |L_{21}| \bar{\bar{V}}_2(x)$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{\bar{V}}_1(x) &= \left(E_1 + \left| \frac{L_{11} - L_{22}}{2 L_{21}} \right| E_2 \right) e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} + \left(d_{1,M} + \left| \frac{L_{11} - L_{22}}{2 L_{21}} \right| d_{2,M} \right) \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}t} dt \\ &\quad + \bar{K}_{12} e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} \int_{x_m}^x e^{-\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(t-x_m)} \bar{V}_2(t) dt, \\ \bar{\bar{V}}_2(x) &= \left(E_1 + \left| \frac{L_{11} - L_{22}}{2 L_{21}} \right| E_2 \right) (x-x_m) e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} + E_2 \frac{1}{|L_{21}|} e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} \\ &\quad + \left(d_{1,M} + \left| \frac{L_{11} - L_{22}}{2 L_{21}} \right| d_{2,M} \right) e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}(x-x_m)} \int_{\sigma}^{x-x_m} \int_{\sigma}^z e^{-\frac{L_{11}+L_{22}}{2}t} dt dz + d_{2,M} \frac{1}{|L_{21}|} \int_{\sigma}^{x-x_m} e^{\frac{L_{11}+L_{22}}{2}t} dt. \end{aligned}$$

2.3. Eine Differentialgleichung erster Ordnung

Wir können uns darauf beschränken, die Fehlerabschätzung von Satz 1 explizit auszurechnen. Da die Indizes i und k nur noch $= 1$ sind, lassen wir sie weg.

Satz 8: $x_m \leq x \leq x_N$ ist

$$|\varepsilon(x)| \leq E(x) = \begin{cases} E \cdot e^{(x-x_m)L} + d_M \frac{e^{(x-x_m)L} - 1}{L} & \text{falls } L \neq 0 \\ E + d_M(x - x_m) & \text{falls } L = 0. \end{cases}$$

Übrigens erhält man diese Abschätzung auch, wenn man (2.8) geschlossen löst und dann die Schranken L , d_M und E benutzt.

3. Numerische Beispiele

Es sei hier an Hand von drei Beispielen je einer Differentialgleichung erster Ordnung eine kleine Erprobung für die praktische Brauchbarkeit gegeben. Um einen Vergleich zu haben, werden jeweils die gebräuchlichen Fehlerschranken — wie sie etwa in [1] angegeben sind — hinzugefügt, und zwar ist $|\varepsilon(x_n)| \leq A_n$ für die independente Fehlerabschätzung, während A_n^* die entsprechende Schranke für die rekursive Abschätzung ist.

Bequemlichkeitshalber entnehmen wir die Werte η_1 für die Anlaufrechnung jeweils der exakten Lösung und die Schranke $E \geq |\varepsilon(x_1)|$ für den Anfangsfehler ist dann durch die Abrundung von $y(x_1)$ zu η_1 gegeben.

1. Beispiel: $y'(x) = 2xy(x)$, $y(2) = 1$.

Die Näherungslösung wurde berechnet mit dem Adamsschen Interpolationsverfahren 2. Ordnung mit der Schrittweite $h = 0,01$. Die Werte $\nabla^3 f_n$ bilden eine monoton wachsende Folge. Es ist $|\varepsilon(2,01)| \leq E = 0,000\,000\,141$, $L(x) = 2x$ und d_M berechnen wir nach Formel (1.5) mit $r = 2$. Die Abschätzungen $|\varepsilon(x_n)| \leq E(x_n)$ nach Satz 8 nehmen wir wegen der starken Änderungen von d_M in 10 Abschnitten vor (Länge des 1. Abschnittes $= 0,04$; sonst $0,05$); d. h. also wir berechnen zunächst $E(2,05)$ mit $x_m = 2,01$, dann $E(2,10)$ mit $x_m = 2,05$ usw. Wenn schon die Fehlerschranken an vielen Stellen x_n interessieren, ist der Arbeitsaufwand fast unabhängig davon, ob man immer auf dasselbe x_m zurückgeht oder x_m stets neu und also so groß wie möglich wählt; die Güte der Fehlerabschätzung nimmt dabei aber erheblich zu, weil man eben die größeren Schwankungen von L und d_M erfaßt.

n	x_n	L	d_M	η_n	$E(x_n)$	A_n	$\varepsilon(x_n)$
5	2,05	4,1	0,000 074	1,224 461	0,000 004	0,000 021	0,000 001
10	2,10	4,2	098	1,506 820	10	50	2
15	2,15	4,3	130	1,863 587	19	88	6
20	2,20	4,4	174	2,316 377	34	138	10
25	2,25	4,5	234	2,893 613	56	205	17
30	2,30	4,6	315	3,632 813	88	295	26
35	2,35	4,7	425	4,583 710	135	415	40
40	2,40	4,8	577	5,812 498	205	575	61
45	2,45	4,9	787	7,407 642	307	788	90
50	2,50	5,0	0,001 077	9,487 869	0,000 455	0,001 073	0,000 133

2. Beispiel: Um möglichst klar erkennen zu können, wie es sich auswirkt, wenn L negativ ist, behandeln wir ein ähnliches Beispiel wie eben:

$$y'(x) = -2xy(x), \quad y(2) = 1.$$

Die Näherungslösung wurde wieder mit dem Adamsschen Interpolationsverfahren 2. Ordnung mit $h = 0,01$ berechnet. Die Werte $\nabla^3 f_n$ bilden eine monoton fallende Folge. Es ist $|\varepsilon(2,01)| \leq E = 0,000\,000\,005$, $L(x) = -2x$ und nach (1.5) ist $d_M = \frac{1}{8} \text{Max } |\nabla^3 f_n|$. Für die Fehlerabschätzung nach Satz 8 genügen hier fünf Abschnitte (einmal Länge $= 0,9$, dann stets $= 1,0$).

n	x_n	L	d_M	η_n	$E(x_n)$	A_n	$\varepsilon(x_n)$
10	2,1	-4,02	0,000 009 533	0,663 650 49	0,000 000 72	0,000 000 43	0,000 000 24
20	2,2	-4,20	9 218	0,431 710 92	1 23	1 20	40
30	2,3	-4,40	8 276	0,275 271 25	1 46	2 55	47
40	2,4	-4,60	7 016	0,172 045 33	1 48	4 96	47
50	2,5	-4,80	0,000 005 666	0,105 399 65	0,000 001 37	0,000 009 26	0,000 000 43

3. Beispiel: Eine nicht-lineare Aufgabe mit negativer Lipschitz-Konstanten:

$$y'(x) = \frac{2x - y^3(x)}{3xy^2(x)}, \quad y(1) = \sqrt[3]{2}.$$

Die Näherungslösung wurde berechnet mit dem Adamsschen Interpolationsverfahren 2. Ord. mit $h = 0,25$. Es ist $|\epsilon(1,25)| \leq E = 0,000\,000\,003$ und nach (2.6) ist

$$L(x) = -\frac{2(\eta + y)}{3\eta^2 y^2} - \frac{1}{3x} \leq L.$$

n	x_n	L	d_M	η_n	$E(x_n)$	A_n^*	$\epsilon(x_n)$
2	1,50	—0,837	0,002 463 05	1,294 227 39	0,000 555 00	0,000 480 23	0,000 238 04
3	1,75	—0,764	1 112 10	1,324 391 98	711 59	824 53	299 13
4	2,00	—0,699	559 93	1,357 510 21	725 95	1 119 14	301 40
5	2,25	—0,642	295 72	1,391 803 32	686 49	1 411 67	282 38
6	2,50	—0,592	162 27	1,426 300 22	629 76	1 717 64	257 07
7	2,75	—0,549	91 69	1,460 465 99	570 51	2 045 23	231 40
8	3,00	—0,510	52 93	1,494 009 20	514 43	2 397 37	207 62
10	3,50	—0,447	30 96	1,558 700 55	425 45	3 214 59	167 76
12	4,00	—0,397	10 60	1,619 943 27	353 82	4 150 39	137 37
14	4,50	—0,356	3 23	1,677 818 79	297 61	5 205 59	114 27
16	5,00	—0,323	47	1,732 574 71	253 57	6 383 52	96 50
20	6,00	—0,271	90	1,833 863 91	194 17	9 239 86	71 55
24	7,00	—0,234	91	1,925 912 14	154 47	0,012 626	55 35
28	8,00	—0,206	75	2,010 407 12	126 39	16 545	44 24
32	9,00	—0,183	56	2,088 645 13	105 77	20 978	36 28
36	10,00	—0,165	41	2,161 622 70	90 06	25 940	30 37
40	11,00	—0,150	30	2,230 115 82	77 79	31 422	25 86
44	12,00	—0,138	22	2,294 738 20	67 97	37 415	22 33
48	13,00	—0,127	17	2,355 982 82	60 02	43 892	19 51
52	14,00	—0,118	0,000 000 13	2,414 251 41	0,000 053 46	0,050 902	0,000 017 22

Die Schranke L entnimmt man den berechneten Näherungswerten η_n , wobei man sich vorher leicht überzeugt, daß deren relative Fehler $\leq 1\%$ sind. Für d_M benutzt man (1.5). Wegen der starken Änderungen von L und d_M führen wir die Abschätzung nach Satz 8 in 20 Abschnitten aus gemäß der vorstehenden Tabelle (für die Berechnung von beispielsweise $E(3,00)$ wurde $x_m = 2,75$ gewählt).

Literatur

- [1] L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag. 2. Auflage (1955).
- [2] H. Eltermann, Vortrag, gehalten am 20. 1. 1951 in Braunschweig, wiedergegeben in [1], S. 108—109.
- [3] H. Eltermann, Fehlerabschätzung bei näherungsweise Lösung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Zeitschrift Bd. 62, S. 469—501 (1955).
- [4] O. Schreier und E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. 2. Band: Teubner, 1935.
- [5] W. Uhlmann, Zur Fehlerabschätzung bei Interpolationspolynomen. Z. angew. Math. Mech., Bd. 36 (1956), S. 73—74.
- [6] L. Vietoris, Der Richtungsfehler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung einer Gleichung $y' = f(x, y)$. Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Math.-naturw. Klasse, Abteilung IIa, 162. Bd., 5. bis 7. Heft 1953, S. 157—167; und ebenda: Der Richtungsfehler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung eines Systems von Gleichungen $y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Eingegangen am 21. April 1956.

Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben einer gewöhnlichen Differentialgleichung höherer Ordnung

Von Werner Uhlmann in Hamburg

Es werden Fehlerabschätzungen aufgestellt für s-mal stetig differenzierbare Näherungslösungen von Anfangswertaufgaben einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung s, und zwar einzeln für die Näherungslösung und ihre Ableitungen bis zur Ordnung (s — 1). Dabei werden die Vorzeichen der Lipschitz-Konstanten soweit wie irgend möglich berücksichtigt. Vorher wird im 1. Abschnitt gezeigt, wie man diese Abschätzungen unmittelbar für das Adamssche Interpolationsverfahren und in einem Spezialfall mit s = 2 auch für das Verfahren der zentralen Differenzen benutzen kann.

Error estimation formulae are derived for approximate solutions of ordinary differential equations of the orders when the approximate solution has continuous derivatives up to the order s. The formulae obtained apply separately to the approximate solution and its derivatives up to the order (s — 1). The signs of the Lipschitz constants are taken into account as far as possible. In Section 1 it is shown how the estimation formulae may be used directly for the Adams process and, in a special case for s = 2, also for the central difference method.

Des évaluations des erreurs sont établies pour des solutions approximatives de problèmes de valeur initiale d'une équation différentielle ordinaire de l'ordre s , solutions à différencier constamment s -fois, c'est à dire individuellement pour la solution approximative et sa dérivée jusqu'à l'ordre $(s-1)$. Dans ce cas les signes de la constante de Lipschitz sont mises en considération aussi bien que possible. Auparavant il est démontré dans le premier passage comment on peut appliquer ces évaluations directement au procédé d'Adam et dans un cas spécial avec $s = 2$ également au procédé des différences centrales.

Выводятся оценки погрешности для приближённых s раз непрерывно дифференцируемых решений задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения порядка s , причём оценки выводятся отдельно для решения и его $s-1$ первых производных. Там, где это возможно, учитываются знаки констант в условии Липшица. До этого, в разделе 1, было показано, каким образом полученным оценкам можно воспользоваться в интерполяционном методе Адамса, а также в случае $s = 2$ в методе „центральных разностей“.

Einleitung

Die vorliegende Arbeit¹⁾ bringt eine Übertragung der Fehlerabschätzungsmethoden für Anfangswertaufgaben bei einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, wie sie in [3] dargestellt sind, auf eine Differentialgleichung der Ordnung s ($s \geq 1$). Der Spezialfall einer Differentialgleichung erster Ordnung ist hier genau so in Satz 1 enthalten wie bei [3] in Satz 1 und 8.

Im 1. Abschnitt wird für das Adamssche Interpolationsverfahren eine s -mal stetig differenzierbare Näherungslösung definiert und bei einem speziellen Typ von Differentialgleichungen zweiter Ordnung ($y'' = f(x, y)$) geschieht dies auch für das Verfahren der zentralen Differenzen. Außerdem werden jeweils die Defekte (= Richtungsfehler) abgeschätzt.

Der 2. Teil bringt Fehlerabschätzungen für beliebige s -mal stetig differenzierbare Näherungslösungen und ihre ersten $(s-1)$ Ableitungen unabhängig davon, nach welchem Verfahren die Näherungslösungen berechnet wurden. Diese Fehlerabschätzungen sind teils einfache Spezialfälle von [3], teils aber geben sie schärfere Schranken. Die Methode für den „Schwingungsfall“ bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung weicht erheblich von den anderen ab, ist aber auch noch am stärksten verbesserungsbedürftig.

Es werden nur reellwertige Funktionen reeller Variabler behandelt.

1. Näherungslösung und Defekt

Vorgelegt sei die Anfangswertaufgabe

$$\frac{d^s y(x)}{dx^s} = y^{(s)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(s-1)}(x)), \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0,i} \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, s-1 \quad (1.1),$$

wobei $f(x, y, y', \dots, y^{(s-1)})$ nach jeder ihrer $(s+1)$ Variablen $(r+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar sei. Für $x_0 \leq x \leq x_{N+1}$ besitze (1.1) eine eindeutig bestimmte Lösung. An den äquidistanten Stellen $x_n = x_0 + nh$ ($h > 0$, $n = 0, 1, \dots, N+1$) seien Näherungswerte $\eta_n^{(i)}$ für die exakte Lösung $y^{(i)}(x_n)$ berechnet ($i = 0, 1, \dots, s-1$). Wir setzen zur Abkürzung $f_n = f(x_n, \eta_n, \eta'_n, \dots, \eta_n^{(s-1)})$.

1.1. Adamssches Interpolationsverfahren

Für $n = m+1, \dots, N+1$ ($m+1 \geq r$) seien die $\eta_n^{(i)}$ nach dem Adamsschen Interpolationsverfahren r -ter Ordnung berechnet. Es sei $P_n(x)$ das Polynom r -ten Grades mit $P_n(x_i) = f_i$ für $i = n+1-r, \dots, n+1$. Wir definieren für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ ($n = m, \dots, N$)

$$\eta(x) = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} (x - x_n)^i \eta_n^{(i)} + \int_{x_n}^x \int_{x_n}^{t_2} \dots \int_{x_n}^{t_s} P_n(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_s \quad (1.2).$$

Dann ist $\eta(x)$ stückweise ein Polynom vom Grade $(r+s)$ und im ganzen Intervall $[x_m, x_{N+1}]$ eine s -mal stetig differenzierbare Funktion mit

$$\left. \frac{d^i \eta(x)}{dx^i} \right|_{x=x_n} = \eta_n^{(i)} \quad \text{und} \quad \left. \frac{d^s \eta(x)}{dx^s} \right|_{x=x_n} = f_n \quad (i = 0, 1, \dots, s-1; \quad n = m, \dots, N+1)$$

$\eta(x)$ und ihre ersten $(s-1)$ Ableitungen gehen also durch die diskreten Näherungswerte $\eta_n^{(i)}$.

Als Defekt definieren wir

$$d(x) = \eta^{(s)}(x) - f(x, \eta(x), \eta'(x), \dots, \eta^{(s-1)}(x)) \quad (1.3).$$

Für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ folgt aus (1.2)

$$d(x) = P_n(x) - f(x, \eta(x), \eta'(x), \dots, \eta^{(s-1)}(x)).$$

Damit können wir $|d(x)|$ durch d_M abschätzen in $[x_m, x_N]$ wie jedes $d_i(x)$ in [3] Abschnitt 1.1.

¹⁾ Siehe 2. Fußnote von [3]. Die eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

1.2. Verfahren der zentralen Differenzen

Es ist bisher für $s = 2$ nur im Spezialfall $y'' = f(x, y)$ gelungen, eine zweimal stetig differenzierbare Näherungslösung zu definieren, allerdings in einer für die Praxis recht günstigen Weise. Der Fall $s > 2$ wurde bisher nicht untersucht.

Wir behandeln also nur die Anfangswertaufgabe

$$y''(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \dots \dots \dots (1.4)$$

wobei $f(x, y)$ nach beiden Variablen viermal stetig partiell differenzierbar sei. Die Näherungswerte η_n für $y(x_n)$ seien für $n = m + 1, \dots, N + 1$ ($m \geq 1$) nach dem Verfahren der zentralen Differenzen berechnet.

Es seien $P_{n,1}(x)$ und $P_{n,2}(x)$ die beiden Polynome dritten Grades mit $P_{n,1+k}(x_i) = f$ für $i = n - 2 + k, n - 1 + k, n + k, n + 1 + k$ ($k = 0, 1$). Wir setzen $P_n(x) = \frac{1}{2} (P_{n,1}(x) + P_{n,2}(x))$, und definieren für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ ($n = m, \dots, N$):

$$\eta(x) = \eta_n + \frac{x - x_n}{h} \left\{ \eta_n - \eta_{n-1} - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{x_{n-1}}^z P_n(t) dt dz \right\} + \int_{x_n}^x \int_{x_{n-1}}^z P_n(t) dt dz \dots (1.5).$$

Dann geht $\eta(x)$ durch die Werte η_n hindurch und $\eta(x)$ ist in $[x_m, x_{N+1}]$ zweimal stetig differenzierbar, wie man leicht sieht. Es sei aber ausdrücklich hervorgehoben, daß $\eta'(x)|_{x=x_n}$ im allgemeinen nicht mit den nach dem Verfahren der zentralen Differenzen berechneten Werten übereinstimmt, die man ja für die Berechnung der η_n hier gar nicht braucht und auf die wir deshalb auch nicht eingehen.

Für die Abschätzung des Anfangsfehlers (siehe Abschnitt 2.1) berechnen wir noch:

$$\eta'(x)|_{x=x_n} = \eta'_n = \frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{h} + \frac{h}{720} \{90 f_{n-1} + 300 f_n - 30 f_{n+1} + 7 (V^3 f_{n+1} + V^3 f_{n+2})\} \quad (1.6).$$

Für den Defekt $d(x)$ ergibt sich für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$:

$$d(x) = \eta''(x) - f(x, \eta(x)) = P_n(x) - f(x, \eta(x)) \dots \dots \dots (1.7).$$

Wir führen eine viermal stetig differenzierbare Hilfsfunktion $g(x)$ ein durch: $g(x) = f(x, \eta(x))$ für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ und $g(x_i) = f_i$ für $i = n - 2, n - 1, \dots, n + 2$. Dann ist nach der bekannten Abschätzung für das Stirlingsche Interpolationspolynom für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$:

$$|d(x)| \leq \frac{1}{54} \sqrt{3} h^4 \cdot \max_{x_{n-2} \leq x \leq x_{n+2}} |g^{IV}(x)|.$$

Ist überdies aber $g^{IV}(x)$ in $[x_{n-2}, x_{n+2}]$ stets ≥ 0 oder stets ≤ 0 , so entnehmen wir Satz 2 von [2], daß für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$

$$|d(x)| \leq \frac{1}{54} \sqrt{3} |V^4 f_{n+2}| \leq 0,0321 |V^4 f_{n+2}|$$

ist, da $V^4 f_{n+2} = {}^4 g_{n+2}$ ist. Insgesamt existiert also wieder eine Schranke d_M : $|d(x)| \leq d_M$ für $x_m \leq x \leq x_N$.

2. Fehlerabschätzungen

Dieser Abschnitt gilt unabhängig vom ersten Abschnitt.

2.1. Eine Differentialgleichung höherer Ordnung

Vorgelegt sei die Anfangswertaufgabe ($s \geq 1$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^s y(x)}{dx^s} &= y^{(s)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(s-1)}(x)) \\ y^{(i)}(x_0) &= y_{0,i} \quad (i = 0, 1, \dots, s-1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.1).$$

Für $x_0 \leq x \leq x_N$ existiere eine eindeutig bestimmte, s -mal stetig differenzierbare Lösung $y(x)$. Für $x_0 \leq x_m \leq x \leq x_N$ sei eine s -mal stetig differenzierbare Näherungslösung $\eta(x)$ berechnet und der Defekt $d(x) = \eta^{(s)}(x) - f(x, \eta(x), \eta'(x), \dots, \eta^{(s-1)}(x))$ möge für $x_m \leq x \leq x_N$ beschränkt sein: $|d(x)| \leq d_M$. Dies ist unter anderem erfüllt für die Näherungslösungen des 1. Abschnittes.

Unter diesen Voraussetzungen ist auch der Fehler $\varepsilon(x) = \eta(x) - y(x)$ s -mal stetig differenzierbar und es mögen Schranken $E^{(i)}$ bekannt sein für x_m :

$$|\varepsilon^{(i)}(x_m)| \leq E^{(i)} \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, s-1 \dots \dots \dots (2.2).$$

Wir führen die Lipschitz-Quotienten $L_i(x)$ ein ($i = 0, 1, \dots, s-1$):

$$L_i(x) = \frac{f(x, y(x), \dots, y^{(i-1)}(x), \eta^{(i)}(x), \dots, \eta^{(s-1)}(x)) - f(x, y(x), \dots, y^{(i)}(x), \eta^{(i+1)}(x), \dots, \eta^{(s-1)}(x))}{\eta^{(i)}(x) - y^{(i)}(x)} \quad (2.3).$$

Sie seien stetig und beschränkt für $x_m \leq x \leq x_N$:

$$l_i \leq L_i(x) \leq L_i, \quad |L_i(x)| \leq K_i = \max \{|l_i|, |L_i|\} \quad (2.4).$$

Aus (2.1) und (2.3) folgt sofort:

$$\varepsilon^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{s-1} L_k(x) \cdot \varepsilon^{(k)}(x) + d(x) \quad (2.5).$$

Wir wollen uns die Ergebnisse von [3] Abschnitt 2.1 zunutze machen und setzen daher:

$$\varepsilon_i(x) = \varepsilon^{(i-1)}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (2.6),$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_i(x) &= \varepsilon_{i+1}(x) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, s-1, \\ \varepsilon'_s(x) &= \sum_{k=1}^s L_{k-1}(x) \cdot \varepsilon_k(x) + d(x) \\ \text{und} \quad \varepsilon_i(x_m) &= \varepsilon^{(i-1)}(x_m) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (2.7).$$

Wir benutzen Satz 1 von [3], setzen entsprechend (2.6) $E(x) = E_1(x)$ und erhalten:

Satz 1:

Für $x_m \leq x \leq x_N$ und $i = 0, 1, \dots, s-1$ ist $|\varepsilon^{(i)}(x)| \leq E^{(i)}(x)$,

wobei $E(x)$ eindeutig bestimmt ist als Lösung der Anfangswertaufgabe

$$E^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{s-2} K_k E^{(k)}(x) + L_{s-1} E^{(s-1)}(x) + d_M, \quad E^{(i)}(x_m) = E^{(i)} \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, s-1.$$

Durch diesen Übergang (2.6) zum System von Differentialgleichungen erster Ordnung können unsere Fehlerabschätzungen auch nutzbar gemacht werden für Systeme von Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

Natürlich können wir entsprechend Satz 2 von [3] lineare Transformationen auf das Differentialgleichungssystem (2.7) anwenden. Es ergibt sich aber für beliebiges s nicht mehr, als schon in Satz 2 und 3 von [3] formuliert ist. Man hat lediglich den Vorteil, daß die Matrix (\tilde{L}_{ik}) schon die Normalform von Kowalewski hat.

2.2. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

Wären die Koeffizienten in (2.5) konstant, so würde $\varepsilon(x)$ im wesentlichen abhängen von L_1 und der Diskriminante $D = L_1^2 + 4L_0$. Dabei bewirkt L_1 ein exponentielles Anwachsen ($L_1 > 0$) oder Abfallen ($L_1 < 0$) und D ein exponentielles Anwachsen ($D > 0$), ein Anwachsen mit x^2 ($D = 0$) oder eine Schwingung ($D < 0$). Der Auswirkung von D entsprechend behandeln wir die Fehlerabschätzung in drei Abschnitten. Der Einfachheit halber schreiben wir für (2.2) jetzt:

$$|\varepsilon(x_m)| \leq E \quad \text{und} \quad |\varepsilon'(x_m)| \leq E'.$$

2.2.1. Der exponentielle Fall

Wir wollen zunächst die Abschätzung des Satzes 1 explizit angeben und setzen deshalb zur Abkürzung $K_2 = +\sqrt{L_1^2 + 4L_0}$. Dann gilt:

Satz 2:

Für $x_m \leq x \leq x_N$ ist

$$|\varepsilon(x)| \leq E(x) \quad \text{und} \quad |\varepsilon'(x)| \leq E'(x)$$

Für $K_0 \neq 0$ ist dabei

$$\begin{aligned} E(x) &= E \frac{1}{2K_2} \left\{ [K_2 - L_1] e^{\frac{L_1 + K_2}{2}(x-x_m)} + [K_2 + L_1] e^{\frac{L_1 - K_2}{2}(x-x_m)} \right\} \\ &+ E' \frac{1}{K_2} \left\{ e^{\frac{L_1 + K_2}{2}(x-x_m)} - e^{\frac{L_1 - K_2}{2}(x-x_m)} \right\} + d_M \frac{2}{K_2} \left\{ \frac{e^{\frac{L_1 + K_2}{2}(x-x_m)} - 1}{L_1 + K_2} - \frac{e^{\frac{L_1 - K_2}{2}(x-x_m)} - 1}{L_1 - K_2} \right\} \end{aligned}$$

$$E'(x) = E \frac{K_0}{K_2} \left\{ e^{\frac{L_1 + K_2}{2} (x - x_m)} - e^{\frac{L_1 - K_2}{2} (x - x_m)} \right\} + E' \frac{1}{2 K_2} \left\{ [K_2 + L_1] e^{\frac{L_1 + K_2}{2} (x - x_m)} + [K_2 - L_1] e^{\frac{L_1 - K_2}{2} (x - x_m)} \right\} + d_M \frac{1}{K_2} \left\{ e^{\frac{L_1 + K_2}{2} (x - x_m)} - e^{\frac{L_1 - K_2}{2} (x - x_m)} \right\}.$$

Für $K_0 = 0$, $L_1 \neq 0$ ist

$$E(x) = E + E' \frac{e^{L_1 \cdot (x - x_m)} - 1}{L_1} + d_M \frac{e^{L_1 \cdot (x - x_m)} - 1 - L_1 \cdot (x - x_m)}{L_1^2},$$

$$E'(x) = E' \cdot e^{L_1 \cdot (x - x_m)} + d_M \frac{e^{L_1 \cdot (x - x_m)} - 1}{L_1}$$

und für $K_0 = 0$, $L_1 = 0$ ist

$$E(x) = E + E' \cdot (x - x_m) + d_M \cdot \frac{1}{2} (x - x_m)^2, \quad E'(x) = E' + d_M \cdot (x - x_m).$$

Diese Abschätzung ist günstig nur für $L_0(x) \geq 0$. Ist dagegen $L_0(x) \leq 0$ (aber $D > 0$), so geht man besser von (2.5) zum System (2.7) über und wendet die Abschätzung von Abschnitt 2.2.2. in [3] an. Dafür ist hier $\hat{L}_0 = \frac{1}{4} (l_1 + L_1)$ und $\hat{L}_{12} = 1$ und also

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11}(x) &= \frac{1}{4} (l_1 + L_1) & \tilde{L}_{12}(x) &= 1 \\ \tilde{L}_{21}(x) &= \frac{1}{4} (l_1 + L_1) L_1(x) - \frac{1}{16} (l_1 + L_1)^2 + L_0(x) & \tilde{L}_{22}(x) &= L_1(x) - \frac{1}{4} (l_1 + L_1) \\ \tilde{d}_1(x) &= 0 & \tilde{d}_2(x) &= d(x). \end{aligned}$$

Es sei $|\tilde{L}_{21}(x)| \leq \tilde{K}_0$ und wir setzen $\tilde{L}_1 = \frac{1}{2} (l_1 + L_1)$, $\tilde{K}_1 = \frac{1}{2} (L_1 - l_1)$ und $\tilde{K}_2 = +\sqrt{\tilde{K}_1^2 + 4 \tilde{K}_0}$.

Dann können wir nach Satz 2 in [3] die $|\varepsilon_i(x)|$ und damit nach (2.6) auch sofort $|\varepsilon^{(i)}(x)|$ abschätzen. Im folgenden Satz geben wir diese Schranken gleich explizit ausgerechnet an und lassen dabei den uninteressanten Fall $\tilde{K}_2 = 0$ fort.

Satz 3:

Für $x_m \leq x \leq x_N$ und $\tilde{K}_2 > 0$ ist

$$|\varepsilon(x)| \leq \tilde{E}_1(x) \quad \text{und} \quad |\varepsilon'(x)| \leq \tilde{E}_2(x).$$

Dabei ist für $|L_1| \neq \tilde{K}_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(x) &= E \frac{1}{2 \tilde{K}_2} \left\{ [\tilde{K}_2 - \tilde{K}_1 + |\tilde{L}_1|] e^{\frac{L_1 + \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} + [\tilde{K}_2 + \tilde{K}_1 - |\tilde{L}_1|] e^{\frac{L_1 - \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} \right\} \\ &+ E' \frac{1}{\tilde{K}_2} \left\{ e^{\frac{L_1 + \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} - e^{\frac{L_1 - \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} \right\} \\ &+ d_M \frac{2}{\tilde{K}_2} \left\{ \frac{e^{\frac{L_1 + \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} - 1}{L_1 + \tilde{K}_2} - \frac{e^{\frac{L_1 - \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} - 1}{L_1 - \tilde{K}_2} \right\}, \\ \tilde{E}_2(x) &= E \frac{1}{4 \tilde{K}_2} \left\{ [(\tilde{K}_2 + |\tilde{L}_1|)^2 - \tilde{K}_1^2] e^{\frac{L_1 + \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} + [\tilde{K}_1^2 - (\tilde{K}_2 - |\tilde{L}_1|)^2] e^{\frac{L_1 - \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} \right\} \\ &+ E' \frac{1}{2 \tilde{K}_2} \left\{ [\tilde{K}_2 + K_1] e^{\frac{L_1 + \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} + [\tilde{K}_2 - K_1] e^{\frac{L_1 - \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} \right\} \\ &+ d_M \frac{1}{\tilde{K}_2} \left\{ \frac{[\tilde{K}_2 + K_1] e^{\frac{L_1 + \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} + \tilde{L}_1 - |\tilde{L}_1|}{L_1 + \tilde{K}_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[\tilde{K}_2 - K_1] e^{\frac{L_1 - \tilde{K}_2}{2} (x - x_m)} - \tilde{L}_1 + |\tilde{L}_1|}{L_1 - \tilde{K}_2} \right\} \end{aligned}$$

und für $|L_1| = \tilde{K}_2$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1(x) &= E \frac{1}{2L_1} \{ [\tilde{L}_1 + |\tilde{L}_1|] e^{\tilde{L}_1 \cdot (x-x_m)} + 2L_1 - \tilde{L}_1 - |\tilde{L}_1| \} + E' \frac{1}{L_1} \{ e^{\tilde{L}_1 \cdot (x-x_m)} - 1 \} \\ &\quad + d_M \cdot \frac{1}{L_1^2} \{ e^{\tilde{L}_1 \cdot (x-x_m)} - 1 - L_1 \cdot (x-x_m) \}, \\ \tilde{E}_2(x) &= E \frac{1}{4L_1} \{ [(L_1 + |\tilde{L}_1|)^2 - \tilde{K}_1^2] e^{\tilde{L}_1 \cdot (x-x_m)} + \tilde{K}_1^2 - (L_1 - |\tilde{L}_1|)^2 \} \\ &\quad + E' \frac{1}{2L_1} \{ [2L_1 - \tilde{L}_1 + |\tilde{L}_1|] e^{\tilde{L}_1 \cdot (x-x_m)} + \tilde{L}_1 - |\tilde{L}_1| \} \\ &\quad + d_M \frac{1}{2L_1} \left\{ \frac{[2L_1 - \tilde{L}_1 + |\tilde{L}_1|] e^{\tilde{L}_1 \cdot (x-x_m)} + \tilde{L}_1 - |\tilde{L}_1|}{L_1} + [\tilde{L}_1 - |\tilde{L}_1|] (x-x_m) - 2 \right\}.\end{aligned}$$

Man beachte, daß hier im Gegensatz zu Satz 2 $\tilde{E}_2(x)$ nicht mehr der Differentialquotient von $\tilde{E}_1(x)$ ist.

2.2.2. Der parabolische Fall

Die folgende Abschätzung ist gedacht für den Fall, daß die Diskriminante $D \leq 0$, aber nicht zu stark negativ ist.

Satz 4:

$$\text{Für } x_m \leq x \leq x_N \text{ sei } -\lambda^2 \leq L_0^*(x) = L_0(x) + \frac{1}{4} L_1 (2L_1(x) - L_1) \leq 0.$$

$$\text{Dann ist für } x_m \leq x \leq x^* = \text{Min} \left\{ x_N, x_m + \frac{2}{\lambda} \right\}:$$

$$|\varepsilon(x)| \leq E_1^*(x) \quad \text{und} \quad |\varepsilon'(x)| \leq E_2^*(x).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}E_1^*(x) &= E \cdot \left(1 + \frac{1}{2} |L_1| (x-x_m) \right) e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} + E' \cdot (x-x_m) e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} \\ &\quad + d_M \frac{1 + \frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m) e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} - e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)}}{\left(\frac{L_1}{2} \right)^2} \quad \text{falls } L_1 \neq 0,\end{aligned}$$

$$E_1^*(x) = E + E' \cdot (x-x_m) + d_M \frac{1}{2} (x-x_m)^2 \quad \text{falls } L_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}E_2^*(x) &= E \left[L_1 + \left(\frac{L_1^2}{4} + \lambda^2 \right) (x-x_m) \right] e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} + E' \left[1 + \frac{L_1}{2} (x-x_m) \right] e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} \\ &\quad + d_M \cdot (x-x_m) e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} \quad \text{falls } L_1 > 0,\end{aligned}$$

$$E_2^*(x) = E \lambda^2 (x-x_m) + E' + d_M \cdot (x-x_m) \quad \text{falls } L_1 = 0$$

$$\begin{aligned}E_2^*(x) &= E \left[-L_1 + \left(\frac{L_1^2}{4} + \lambda^2 \right) (x-x_m) \right] e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} + E' \left[1 - \frac{L_1}{2} (x-x_m) \right] e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} \\ &\quad + d_M \{ -(x-x_m) e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} + 4 \frac{e^{\frac{1}{2} L_1 \cdot (x-x_m)} - 1}{L_1} \} \quad \text{falls } L_1 < 0.\end{aligned}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $x_m = 0$ ist. Wir setzen $\varepsilon(x) = u(x) e^{\frac{1}{2} L_1 x}$. Dann ist $\varepsilon'(x) = u'(x) e^{\frac{1}{2} L_1 x} + \frac{L_1}{2} u(x) e^{\frac{1}{2} L_1 x}$ und für $0 \leq \xi \leq x$ folgt aus (2.5) durch Integration

$$u(x) = u(\xi) + u'(\xi) x + \int_{\xi}^x \int_{\xi}^s \left\{ (L_1(t) - L_1) u'(t) + L_0^*(t) u(t) + d(t) e^{-\frac{1}{2} L_1 t} \right\} dt ds \quad (2.8)$$

und

$$u'(x) = u'(\xi) + \int_{\xi}^x \left\{ (L_1(t) - L_1) u'(t) + L_0^*(t) u(t) + d(t) e^{-\frac{1}{2} L_1 t} \right\} dt \quad (2.9).$$

Um $|\varepsilon(x)| \leq E_1^*(x)$ nachzuweisen, genügt es ersichtlich zu zeigen, daß für $0 \leq x \leq x^*$

$$|u(x)| \leq U(x) = U_0 + U'_0 x + \int_0^x \int_0^s d_M e^{-\frac{1}{2} L_1 t} dt ds \dots \dots \dots (2.10)$$

mit $|u(0)| \leq U_0 = E$ und $|u'(0)| \leq U'_0 = \frac{1}{2} |L_1| E + E'$ ist.

Beweis für (2.10): 1.) Wenn $u(0) \geq 0$ und $u'(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq x^*$ ist, so folgt (2.10) sofort aus (2.8) für $\xi = 0$. Dasselbe gilt für $u(0) \leq 0$ und $u'(x) \leq 0$.

2.) Für $u(0) \geq 0$ und $u'(x) \leq 0$ für $0 \leq x \leq x^*$ ist nach (2.8) für $\xi = 0$:

$$U(x) \geq U_0 \geq u(0) \geq u(x) \geq u(0) - U'_0 x - \lambda^2 u(0) \frac{x^2}{2} - d_M \int_0^x \int_0^s e^{-\frac{1}{2} L_1 t} dt ds \geq -U(x)$$

und genau so läßt sich $u(0) \leq 0$, $u'(x) \geq 0$ behandeln.

3.) Wäre (2.10) falsch, so würde es nach 1. und 2. ein x und ein ξ_1 geben mit $|u(t)| \leq U(t)$ für $0 \leq t \leq \xi_1$, $u'(\xi_1) = 0$, $u'(t) \neq 0$ für $\xi_1 < t \leq x < x^*$ und $|u(x)| > U(x)$. Genau wie unter 1. und 2. kann man aber aus (2.8) für $\xi = \xi_1$ folgern, daß doch $|u(x)| < U(x)$ wäre. Also ist die Annahme falsch und damit (2.10) bewiesen.

Für den Nachweis von $|\varepsilon'(x)| \leq E_2^*(x)$ genügt es ersichtlich zu zeigen, daß

$$|u'(x)| \leq U_0 \lambda^2 x + U'(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq x^* \dots \dots \dots (2.11)$$

ist. Beweis für (2.11): Wir führen den Beweis nur für $u'(x) \geq 0$; andernfalls geht er genau so.

Sicher gibt es ein ξ_2 ($0 \leq \xi_2 \leq x$) mit $u'(t) \geq 0$ für $\xi_2 \leq t \leq x$ und $u'(\xi_2) = \begin{cases} u'(0) & \text{falls } \xi_2 = 0 \\ 0 & \text{falls } \xi_2 > 0 \end{cases}$. Aus (2.9) folgt für $\xi = \xi_2$ sofort $|u'(x)| \leq U'(x)$, falls $u(\xi_2) \geq 0$ und also auch $u(t) \geq 0$ ist. Für $u(\xi_2) < 0$ ist dagegen

$$0 \leq u'(x) \leq u'(\xi_2) + \lambda^2 U(\xi_2) (x - \xi_2) + d_M \int_{\xi_2}^x e^{-\frac{1}{2} L_1 t} dt$$

und durch Einsetzen von $U(\xi_2)$ gemäß (2.10) folgt: $0 \leq u'(0) \leq U_0 \lambda^2 x + U'(x)$. Damit ist (2.11) und also auch Satz 4 bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß Satz 4 etwas günstigere Schranken liefert, als eine bloße Spezialisierung der Abschätzungen in [3] Abschnitt 2.2.3. es tun würde.

2.2.3. Schwingungsfall

Es bleibt nur der Fall $D < 0$ zu behandeln. Man wird aber bemerken, daß die folgende Fehlerabschätzung höchstens dann günstiger als Satz 4 ausfällt, wenn $|D|$ und $(x_N - x_m)$ groß sind. Da $\varepsilon(x)$ wegen $D < 0$ Schwingungen ausführt, gehen wir für die Fehlerabschätzung so vor, daß wir das Anwachsen der Amplituden von einem Extremum zum anderen nach oben und den Abstand zweier Extrema nach unten abschätzen.

Wir setzen stets $x \geq x_m$ voraus und denken uns für alle Hilfssätze $L_0(x)$, $L_1(x)$ und $d(x)$ so stetig über x_N hinaus definiert, daß alle ihre Ungleichungen erhalten bleiben.

Wir setzen

$$\varepsilon(x) = u(x) \cdot e^{\gamma \cdot (x - x_m)} \quad \text{mit} \quad 2\gamma = \begin{cases} L_1 & \text{falls } L_1 \geq 0 \\ 0 & \text{falls } L_1 < 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$u''(x) = \hat{L}_1(x) u'(x) + \hat{L}_0(x) u(x) + d(x) e^{-\gamma (x - x_m)} \dots \dots \dots (2.12)$$

mit

$$\hat{L}_1(x) = L_1(x) - 2\gamma \leq 0, \quad \hat{L}_0(x) = L_0(x) + \gamma L_1(x) - \gamma^2, \quad e^{-\gamma (x - x_m)} \leq 1 \quad (2.13)$$

und es sei

$$-A^2 \leq \hat{L}_0(x) \leq -\lambda^2 < 0 \quad (0 < \lambda \leq A) \dots \dots \dots (2.14).$$

Aus (2.12) folgt sofort:

Hilfssatz 1: Wenn $u'(\xi) = 0$ ist und $u'(x) \geq 0$ [≤ 0] ist in mindestens einer rechtsseitigen Umgebung von ξ , so ist

$$u(\xi) \leq \frac{d_M}{\lambda^2} \quad \left[\geq -\frac{d_M}{\lambda^2} \right].$$

Hilfssatz 2: Wenn $u'(\xi) = 0$ und $u(\xi) < -\frac{d_M}{\lambda^2} \left[> \frac{d_M}{\lambda^2} \right]$ ist, so hat $u(x)$ bei ξ ein relatives Minimum [Maximum].

Aus (2.12) folgt für $x_m \leq \xi \leq x$ weiter:

$$u'(x) = u'(\xi) + \int_{\xi}^x \{\hat{L}_1(t) u'(t) + \hat{L}_0(t) u(t) + d(t) e^{-\gamma(t-x_m)}\} dt \quad (2.15).$$

Für $\xi = \xi_1$ liest man daraus ab:

Hilfssatz 3: Wenn es ein ξ_1 gibt mit $|u(\xi_1)| > \frac{d_M}{\lambda^2}$ und $\operatorname{sgn} u'(\xi_1) = \operatorname{sgn} u(\xi_1)$, so gibt es auch ein $\xi_2 > \xi_1$ mit $u'(\xi_2) = 0$, und $u(x)$ hat bei ξ_2 ein relatives Extremum.

Hilfssatz 4: Es sei $u'(x) \neq 0$ für $\xi_1 < x < \xi_2$ und $u'(\xi_2) = 0$. Dann ist

$$|u(\xi_2)| \leq \frac{d_M}{\lambda^2} e^{-\gamma(\xi_1-x_m)} + \sqrt{\frac{d_M^2}{\lambda^4} e^{-2\gamma(x-x_m)} + 2 \frac{d_M}{\lambda^2} e^{-\gamma(x-x_m)} |u(\xi_1)| + \frac{\lambda^2}{\lambda^2} |u(\xi_1)|^2 + \frac{1}{\lambda^2} |u'(\xi_1)|^2} \quad (2.16).$$

Beweis: Es sei $u'(x) > 0$ für $\xi_1 < x < \xi_2$ ($u'(x) < 0$ geht entsprechend). Dann kann man x als Funktion von u auffassen und $u'(x) = z(u)$ setzen. Aus (2.12) folgt

$$z^2(u) = (u'(\xi_1))^2 + 2 \int_{u_1}^u \{\hat{L}_1(x(u)) z(u) + \hat{L}_0(x(u)) u + d(x(u)) e^{-\gamma(x(u)-x_m)}\} du \quad (2.17)$$

mit $u_i = u(\xi_i)$. Es ist $z(u_2) = 0$.

1. Fall: $u(\xi_1) \geq 0$. Dann ist nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ($\tilde{~}$ = Zwischenwert)

$$0 = (u'(\xi_1))^2 + 2 \{\hat{L}_1(\tilde{x}) \tilde{z} + d(\tilde{x}) e^{-\gamma(\tilde{x}-x_m)}\} (u_2 - u_1) + \hat{L}_0(\tilde{x}) (u_2^2 - u_1^2).$$

Man löst nach u_2 auf und erhält durch Abschätzen:

$$0 \leq u_2 \leq \frac{d_M}{\lambda^2} e^{-\gamma(\xi_1-x_m)} + \sqrt{\left(\frac{d_M}{\lambda^2} e^{-\gamma(\xi_1-x_m)} - u_1\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} |u'(\xi_1)|^2} \quad (2.18)$$

also erst recht (2.16), wobei man benutzt, daß ganz allgemein $x + \sqrt{(x-a)^2 + b}$ mit $b \geq 0$ eine monoton wachsende Funktion ist.

2. Fall: $u(\xi_1) \leq 0$. Hier wird in (2.17) für das Glied $\hat{L}_0(x(u)) \cdot u$ das Integral aufgespalten in $\int_{u_1}^0$ und $\int_0^{u_2}$. Wie eben — nur mit etwas mehr Rechenaufwand — schätzt man u_2 ab und erhält genau die Schranke (2.16).

Definition 1: Ein relatives Extremum von $u(x)$ an der Stelle ξ heißt wesentlich, wenn

$$|u(\xi)| > \frac{2 d_M}{\lambda^2}.$$

Durch ein Beispiel läßt sich zeigen, daß der Abstand zweier wesentlicher Extrema $< \frac{\pi}{\lambda}$ sein kann. Man kann aber zeigen:

Hilfssatz 5: Der Abstand zweier wesentlicher Extrema ist $> \frac{\pi}{2\lambda}$. Wir beweisen dies indem wir zeigen:

Hilfssatz 6: Wenn $u'(\xi_6) = 0$ ist und es mindestens eine Nullstelle von $u'(x)$ gibt, die $\geq x_m$ aber $< \xi_6$ ist, und wenn $|u(\xi_6)| > \frac{2 d_M}{\lambda^2}$ ist, so ist $(\xi_6 - \xi_3) > \frac{\pi}{2\lambda}$, wobei ξ_3 die größte Zahl $< \xi_6$ mit $u'(\xi_3) = 0$ ist.

Beweis: Wegen $|u(\xi_6)| > \frac{2 d_M}{\lambda^2}$ ist $u''(\xi_6) \neq 0$, also $u'(x) \neq \text{const}$ und also existiert ξ_3 . Wir führen den Beweis für $u(\xi_6) > 0$, andernfalls geht er entsprechend. Aus (2.18) folgt indirekt, daß $u(\xi_3) < 0$ ist, da $|u(\xi_6)| > \frac{2 d_M}{\lambda^2}$. Also ist $u'(x) > 0$ für $\xi_3 < x < \xi_6$ und wir können dort (2.17) mit $\xi_1 = \xi_3$ und $u'(\xi_1) = 0$ benutzen. Also ist

$$z^2(u) \leq Z^2(u) = \begin{cases} \lambda^2 (u_3^2 - u^2) + d_M 2(u - u_3) & \text{für } u_3 \leq u \leq 0 \\ \lambda^2 u_3^2 - \lambda^2 u^2 + d_M 2(u - u_3) & \text{für } 0 \leq u \leq u_6 \end{cases}$$

Wir definieren nun $U(x)$ durch die Anfangswertaufgabe

$$U'(x) = Z(U) \geq 0, \quad U(\xi_3) = u_3.$$

Dann ist $U''(x) = \begin{cases} -\lambda^2 U + d_M & \text{für } u_3 \leq U \leq 0 \\ -\lambda^2 U + d_M & \text{für } 0 \leq U \leq u_6 \end{cases}$ und also ist für $u_3 \leq U \leq 0$:

$$U(x) = \frac{d_M}{\lambda^2} + \left(u_3 - \frac{d_M}{\lambda^2}\right) \cos(x - \xi_3) \lambda \dots \dots \dots (2.19)$$

und wenn wir die erste Nullstelle $> \xi_3$ mit ξ_4 bezeichnen, so ist

$$U(x) = \frac{d_M}{\lambda^2} - \frac{d_M}{\lambda^2} \cos(x - \xi_4) \lambda + U'(\xi_4) \frac{1}{\lambda} \sin(x - \xi_4) \lambda \text{ für } \xi_4 \leq x \leq \xi_5 \dots (2.20),$$

wobei ξ_5 die kleinste Zahl $> \xi_4$ mit $U(\xi_5) = u_6$ ist. ξ_4 und ξ_5 existieren wegen $Z(u) \geq z(u)$.

Man rechnet nun mit (2.19) leicht nach, daß $\xi_4 \leq \xi_3 + \frac{\pi}{2\lambda}$ ist. Mit (2.20) läßt sich $U(x)$ im ganzen Intervall $\left[\xi_4, \xi_4 + \frac{\pi}{2\lambda}\right]$ definieren, falls nicht sowieso $\xi_4 + \frac{\pi}{2\lambda} \leq \xi_5$ ist; $U(x)$ ist dort stark monoton wachsend. Da $z(u) \leq Z(u)$ ist, brauchen wir also, um $(\xi_6 - \xi_3) > \frac{\pi}{2\lambda}$ zu beweisen, nur zu zeigen, daß $U\left(\xi_3 + \frac{\pi}{2\lambda}\right) \leq \frac{d_M}{\lambda^2} < \frac{2d_M}{\lambda^2}$ ist, und das geschieht so:

$$\begin{aligned} U\left(\xi_3 + \frac{\pi}{2\lambda}\right) &= \frac{d_M}{\lambda^2} - \frac{d_M}{\lambda^2} \cos\left(\xi_3 + \frac{\pi}{2\lambda} - \xi_4\right) \lambda + \frac{1}{\lambda} \sqrt{-2u_3 d_M + u_3^2 \lambda^2} \sin\left(\xi_3 + \frac{\pi}{2\lambda} - \xi_4\right) \lambda \\ &\leq \frac{d_M}{\lambda^2} - \frac{d_M}{\lambda^2} \cos\left(\xi_3 - \xi_4 + \frac{\pi}{2\lambda}\right) \lambda + \frac{1}{\lambda} \sqrt{-2u_3 d_M + u_3^2 \lambda^2} \sin\left(\xi_3 - \xi_4 + \frac{\pi}{2\lambda}\right) \lambda \\ &= \frac{d_M}{\lambda^2} + \frac{d_M \sqrt{-2d_M u_2 + \lambda^2 u_2^2}}{\lambda(d_M - \lambda^2 u_2)} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda}\right) \leq \frac{d_M}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Hilfssatz 7: Für $x_m \leq x \leq x_m + (R+1) \frac{\pi}{2\lambda}$ ist $|u(x)| \leq U_{R+1}$, wobei die U_R rekursiv definiert sind durch $\left(\beta = \gamma \frac{\pi}{2\lambda}\right)$:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{d_M}{\lambda^2} + \sqrt{\frac{d_M^2}{\lambda^4} + 2 \frac{d_M}{\lambda^2} E + \frac{\lambda^2}{\lambda^2} E^2 + \frac{1}{\lambda^2} (E' + \gamma E)^2}, \\ U_{R+1} &= \frac{d_M}{\lambda^2} e^{-R\beta} + \sqrt{\frac{d_M^2}{\lambda^4} e^{-2R\beta} + 2 \frac{d_M}{\lambda^2} e^{-2R\beta} U_R + \frac{\lambda^2}{\lambda^2} U_R^2} \quad (R = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} (2.21).$$

Beweis: Da der Abstand zwischen dem ersten Extremum und dem ersten nachfolgenden wesentlichen Extremum ebenso wie die Abstände zweier wesentlicher Extrema $\geq \frac{\pi}{2\lambda}$ ist, kann $u(x)$ höchstens $(R+1)$ wesentliche Extrema haben $\left(x - x_m \leq (R+1) \frac{\pi}{2\lambda}\right)$. Falls $u(x)$ überhaupt kein wesentliches Extremum hat, folgt die Behauptung aus Hilfssatz 3. Sonst folgt sie aus Hilfssatz 4, wobei wir das erste Extremum durch U_0 und die folgenden wesentlichen Extrema durch U_1, U_2, \dots abschätzen.

Hilfssatz 8: Mit der Bezeichnung (2.21) ist für

$$x_m \leq x \leq x_m + (R+1) \frac{\pi}{2\lambda} \quad (R = 0, 1, 2, \dots) \quad |u'(x)| \leq \hat{U}_{R+1},$$

wobei

$$\hat{U}_{R+1} = + \sqrt{\lambda^2 U_R^2 + 2 d_M U_R + \frac{d_M}{\lambda^2}} \dots \dots \dots (2.22).$$

Beweis: Da der Fall $u'(x) = 0$ trivial ist, setzen wir voraus: $u'(x) > 0$ (< 0 geht entsprechend). Dann gibt es ein ξ_1 mit $u'(t) > 0$ für $\xi_1 < t \leq x$ und $u'(\xi_1) = 0$ oder $\xi_1 = x_m$, und wir können (2.17) benutzen.

1. $\xi_1 = x_m$. Dann ist $|u'(\xi_1)| \leq (E' + \gamma E)$ und aus (2.17) folgt:

$$z^2(u) \leq \left(\lambda U_0 + \frac{d_M}{\lambda}\right)^2 \leq \hat{U}_{R+1}^2.$$

2. $\xi_1 > x_m$. Dann ist $u'(\xi_1) = 0$ und aus (2.17) folgt $z^2(u) \leq \hat{U}_{R+1}^2$, wobei man benutzt, daß $|u(\xi_1)| < U_R$ ist, wegen $\xi_1 < x_m + (R+1) \frac{\pi}{2A}$.

Mit Hilfe der letzten beiden Hilfssätze folgt nun endlich:

Satz 5: Für $x_m \leq x \leq \min \left\{ x_N, x_m + (R+1) \frac{\pi}{2A} \right\}$ ($R = 0, 1, 2, \dots$) ist unter der Voraussetzung (2.14) und mit den Bezeichnungen (2.21), (2.22)

$$|\varepsilon(x)| \leq \hat{E}_1(x) = U_{R+1} e^{\gamma(x-x_m)}$$

$$|\varepsilon'(x)| \leq \hat{E}_2(x) = (\hat{U}_{R+1} + \gamma U_{R+1}) e^{\gamma(x-x_m)}.$$

Um sich ein Bild über die erzielten Verbesserungen zu machen, betrachten wir den Spezialfall: $E = E' = 0$, $L_1(x) \equiv 0$, $L_0(x) = L_0 = -K_0 < 0$.

Dann ist $U_0 = 2 \frac{d_M}{K_0}$ und $U_{R+1} = 2 \frac{d_M}{K_0} + U_R = 2(R+1) \frac{d_M}{K_0}$ und Satz 5 liefert:

$$\left| \varepsilon \left(x_m + R \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}} \right) \right| \leq d_M \frac{2R}{K_0}.$$

Nach Satz 2 und auch nach Satz 3 ist

$$\left| \varepsilon \left(x_m + R \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}} \right) \right| \leq d_M \frac{1}{K_0} \left\{ \left| \cos \frac{R\pi}{2} \right| - 1 \right\}.$$

Satz 4 müßte — je nach der Größe von R — mehrfach angewendet werden, so daß also die dortige Schranke größer ausfällt als

$$d_M \frac{(x - x_m)^2}{2} = d_M \frac{\pi^2 R^2}{8 K_0}.$$

3. Numerische Beispiele

Im Folgenden werden die obigen Fehlerabschätzungen für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung an vier linearen und zwei nicht-linearen Beispielen erprobt. Um einen Vergleich zu haben, werden jeweils die gebräuchlichen, rekursiven Fehlerschranken — wie sie etwa in [1] angegeben sind — hinzugefügt, und zwar ist $|\varepsilon(x_n)| \leq A_n$ und $|\varepsilon'(x_n)| \leq A'_n$.

Der Einfachheit halber nehmen wir die Werte η_n und η'_n gleich den entsprechenden Werten der exakten Lösung abgerundet auf die jeweils benutzte Anzahl von Dezimalstellen. Die Schranken E und E' (siehe (2.2)) sind dann einfach durch diese Abrundung gegeben.

1. Beispiel:

$$y''(x) = (1 + x^2) y(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Die Näherungslösung wurde berechnet mit dem Verfahren der zentralen Differenzen mit $h = 0,1$. Es ist $|\varepsilon(0,1)| \leq E = 0,000\,000\,002$ und nach (1.6) ist $|\varepsilon'(0,1)| \leq E' = 0,000\,000\,37$. Weiter ist $L_0(x) = 1 + x^2 \leq L_0 = K_0$ und $L_1(x) \equiv 0 = L_1$ und wir benutzen also die Abschätzung von Satz 2. Wir nehmen sie in Abschnitten der Länge 0,1 vor, da die 4. Differenzen $\nabla^4 f_n$ sich nach je zwei Schritten ungefähr verdoppeln. Wir berechnen also $E(x_n)$ und $E'(x_n)$ mit Hilfe der schon ermittelten Schranken $E(x_{n-1})$ und $E'(x_{n-1})$ (also $x_m = x_{n-1}$) und dabei ist dann $K_0 = 1 + x_n^2$ und $d_M = 0,0321 \nabla^4 f_{n+1}$. Da die Schranke $E(x_n)$ für alle n rund 6,8 mal so groß wie der tatsächliche Fehler ist, enthält die folgende Tabelle nur jeden fünften Wert, und da die η'_n entsprechend der Bemerkung anschließend an (1.5) nicht berechnet wurden, verzichten wir auf die Angabe der hier nur als Hilfsgrößen anzusehenden $E'(x_n)$. Die Wiedergabe der A_n erübrigt sich, da A_{30} weit größer als selbst η_{30} ausfällt.

n	x_n	d_M	η_n	$E(x_n)$	$\varepsilon(x_n)$
5	0,5	0,000 079 59	1,133 149 17	0,000 004 76	0,000 000 72
10	1,0	0,000 302 39	1,648 726 83	0,000 038 47	0,000 005 56
15	1,5	0,001 468 23	3,080 247 32	0,000 210 2	0,000 030 47
20	2,0	0,008 390	7,389 231 09	0,001 200	0,000 174 99
25	2,5	0,056 617	22,761 057	0,007 92	0,001 162
30	3,0	0,455 622	90,026 351	0,062 52	0,009 220

2. Beispiel:

$$y''(x) = \frac{y(x)}{4x^2}, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2.$$

Die Näherungslösung wurde mit dem A d a m s s c h e n Interpolationsverfahren 2. Ordnung mit $h = 0,2$ berechnet. Es ist $E = 0,0000005$ und $E' = 0,0000002$. Weiter ist $L_0(x) = \frac{-1}{4x^2}$, $L_1(x) \equiv 0$ und für Satz 4 ist $-\frac{1}{4} \leq L_0^*(x) = L_0(x) \leq 0$ und also $\lambda = \frac{1}{2}$. Um das starke Abfallen von $\nabla^3 f_n$ zu erfassen, nehmen wir die Abschätzung nach Satz 4 in 6 Abschnitten entsprechend der folgenden Tabelle vor:

n	x_n	x_m	d_M	η_n	η'_n	$E_1^*(x_n)$	A_n	$\varepsilon(x_n)$	$E_2^*(x_n)$	A'_n	$\varepsilon'(x_n)$
3	1,6	1,2	0,000 955 3	3,124 360	1,767 045	0,000 077	0,000 056	0,000 025	0,000 383	0,000 286	0,000 121
5	2,0	1,6	365 4	3,808 769	1,659 444	260	227	84	537	584	166
7	2,4	2,0	165 2	4,454 811	1,573 736	488	522	154	629	907	185
10	3,0	2,4	84 3	5,367 223	1,472 038	881	1227	269	753	1 473	195
15	4,0	3,0	35 9	6,773 055	1,346 769	1 652	3 304	466	1 009	2 788	195
20	5,0	4,0	0,000 011 9	8,071 609	1,254 500	0,002 667	0,007 063	0,000 660	0,001 434	0,004 916	0,000 192

3. Beispiel:

$$y''(x) = -2x y'(x) - x^2 y(x), \quad y(2) = 10, \quad y'(2) = 0.$$

Die Näherungslösung wurde mit dem A d a m s s c h e n Interpolationsverfahren 2. Ordnung mit $h = 0,05$ berechnet. Es ist $E = E' = 0,0000002$. Weiter ist $L_0(x) = -x^2$, $L_1(x) = -2x \leq -4,1 = L_1$ und für Satz 4 ist $-1,25^2 \leq L_0^*(x) = -\left(x + \frac{1}{2} L_1\right)^2 \leq 0$ und also $\lambda = 1,25$. $\Delta^3 f_n$ schwankt nur wenig, wir können die Abschätzung nach Satz 4 in einem Abschnitt ausführen und es ist also dafür $x_m = 2,05$ und $d_M = \frac{1}{8} \text{Max } |\nabla^3 f_n| = 0,002775$.

n	x_n	η_n	η'_n	$E_1^*(x_n)$	A_n	$\varepsilon(x_n)$	$E_2^*(x_n)$	A'_n	$\varepsilon'(x_n)$
2	2,1	9,819 251	-3,429 933	0,000 004	0,000 002	0,000 000	0,000 140	0,000 055	+0,000 009
8	2,4	7,891 582	-8,267 712	107	174	18	913	1 738	+ 105
14	2,7	5,351 012	-8,138 037	254	2 693	54	1 518	23 451	+ 119
20	3,0	3,196 045	-6,089 912	383	35 877	80	1 946	0,307 839	+0,000 045
26	3,3	1,712 626	-3,851 943	0,000 479	0,470 984	0,000 081	0,002 231	4,035 524	-0,000 040

4. Beispiel:

$$y''(x) = -y(x) + \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Die Näherungslösung wurde berechnet mit dem Verfahren der zentralen Differenzen mit $h = 0,2$. Wir benutzen die Abschätzung von Satz 5. Es ist $L_0(x) = -1$, $L_1(x) = 0$ und also $\beta = \gamma = 0$, $A = \lambda = 1$.

Weiter ist $d_M = 0,0321 \text{Max} |\nabla^4 f_n| = 0,0002411$. Gegen d_M können $E = 0,000000021$ und $E' = 0,00000055$ ohne weiteres vernachlässigt werden. Nach Satz 5 ist hier

$$|\varepsilon(x)| \leq \hat{E}_1(x) = 2(R+2)d_M \quad \text{für} \quad 0,2 + R\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0,2 + (R+1)\frac{\pi}{2}.$$

In der folgenden Tabelle geben wir die Fehlerschranken an für jeden fünften Näherungswert und für die Stellen, an denen η_n oder $\varepsilon(x_n)$ maximal sind.

n	x_n	η_n	$\hat{E}_1(x_n)$	$\varepsilon(x_n)$
5	1,0	+0,270 152 2	0,000 964 4	+0,000 001 0
7	1,4	+0,050 994 4	964 4	+ 4 3
9	1,8	-0,022 710 4	1 446 6	- 9 8
10	2,0	+0,000 013 3	1 446 6	+ 13 3
15	3,0	+0,495 024 4	1 446 6	+ 28 1
16	3,2	+0,599 005 7	1 928 8	+ 28 8
18	3,6	+0,717 432 6	1 928 8	+ 25 9
20	4,0	+0,653 660 3	1 928 8	+ 16 7
25	5,0	-0,425 519 5	2 411 0	- 26 2
30	6,0	-1,920 398 9	2 411 0	- 58 3
33	6,6	-2,185 585 1	2 893 2	- 50 1
35	7,0	-1,884 786 3	2 893 2	- 30 5
40	8,0	+0,436 546 7	3 375 4	+ 46 7
45	9,0	+3,189 050 6	3 375 4	+ 94 5
48	9,6	+3,741 891 2	3 857 6	+ 77 2
50	10,0	+3,356 330 8	0,003 857 6	+0,000 044 8

Zum Vergleich: Nach Satz 2 und 3 ist $E(10) = 2,174$ und nach Satz 4 erhält man durch mehrfache Anwendung $E_1^*(10) = 0,054 49$. Die Schranken A_n sind unbrauchbar, da $A_{50} \approx 9,9 \cdot 10^{12}$ ist.

5. Beispiel:

$$y''(x) = \frac{(y'(x))^2}{y(x)} - \frac{y(x)}{10}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Die Näherungslösung wurde berechnet mit dem A d a m s s c h e n Interpolationsverfahren 2. Ordnung mit $h = 0,05$. Es ist $E = 0,00000002$ und $E' = 0,00000001$. Weiter ist $L_0(x) = -\frac{\eta'^2}{\eta y} - 0,1$, $L_1(x) = \frac{\eta' + y'}{y} \leq L_1 = 4$ und für Satz 4 ist (nach vorheriger größerer Abschätzung)

$$-0,221 = -\lambda^2 \leq L_0^*(x) = -0,1 - \frac{\eta}{y} \left(\frac{\eta'}{y} - 2 \right)^2 + 2 \frac{y' - \eta'}{y'} \frac{y'}{y} + 4 \frac{\eta - y}{y} \leq 0.$$

Wir nehmen die Abschätzung nach Satz 4 in mehreren Abschnitten vor; das benutzte x_m und d_M sind jeweils angegeben.

n	x_n	x_m	d_M	η_n	η'_n	$E_1^*(x_n)$
5	0,25	0,05	0,000 558 0	1,643 580 9	3,246 111 0	0,000 014 7
10	0,50	0,25	849 0	2,684 546 2	5,235 002 3	142 3
15	0,75	0,50	1 282 1	4,357 518 3	8,388 557 7	772 7
20	1,00	0,50	1 921 6	7,029 038 4	13,355 881 4	2 456 0
25	1,25	1,00	2 858 5	11,267 842 8	21,128 591 1	10 232 0
30	1,50	1,00	4 220 1	17,950 378 9	33,210 778 7	27 704 4
35	1,75	1,00	6 182 9	28,418 050 1	51,867 564 3	65 412 0
40	2,00	1,00	0,008 989 4	44,709 785 3	80,485 674 8	0,145 586 5

A_n	$\varepsilon(x_n)$	$E_2^*(x_n)$	A'_n	$\varepsilon'(x_n)$
0,000 005 0	0,000 003 8	0,000 166 7	0,000 059 7	0,000 046 2
47 8	31 4	884 5	341 9	198 4
242 3	120 6	3 901 7	1 449 7	567 1
1 021 9	350 8	9 783 4	5 693 7	1 375 0
4 027 4	877 7	45 843 6	21 794 7	3 031 5
15 454 8	1 996 4	99 718 5	82 648 0	6 271 1
58 678 5	4 248 6	0,209 272 4	0,312 301 3	12 376 6
0,221 849 0	0,008 600 8	0,432 486 1	1,178 494 9	0,023 542 7

6. Beispiel:

$$y''(x) = \frac{(y'(x))^2}{y(x)} - \frac{y(x)}{10}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

(Fast wie 5. Beispiel, nur ist jetzt auch L_1 negativ!)

Die Näherungslösung wurde berechnet mit dem A d a m s s c h e n Interpolationsverfahren 2. Ordnung mit $h = 0,05$. Es ist $E = 0,000000001$ und $E' = 0,000000003$. Weiter ist $L_0(x) = -\frac{\eta'^2}{\eta y} - 0,1$,

$L_1(x) = \frac{\eta' + y'}{y} \leq L_1 = -4$ und ähnlich wie eben ist

$$-0,225 = -\lambda^2 \leq L_0^*(x) = -0,1 - \frac{\eta}{y} \left(\frac{\eta'}{y} + 2 \right)^2 + 2 \frac{\eta' - y'}{y'} \frac{y'}{y} + 4 \frac{\eta - y}{y} \leq 0.$$

Wir nehmen die Abschätzung nach Satz 4 in zwei Abschnitten vor und zwar ist $x_m = 0,05$, $d_M = 0,00033732$ für $x_n \leq 1$ und $x_m = 1$, $d_M = 0,00006132$ für $1 < x_n \leq 2$.

n	x_n	η_n	η'_n	$E_1^*(x_n)$	A_n
5	0,25	0,604 636 61	-1,224 405 62	0,000 005 19	0,000 003 39
10	0,50	0,363 304 54	-0,744 797 33	19 19	30 17
15	0,75	0,216 934 60	-0,450 161 42	34 42	153 59
20	1,00	0,128 726 55	-0,270 344 22	47 75	697 14
25	1,25	0,075 908 16	-0,161 319 08	81 06	3 083 79
30	1,50	0,044 482 52	-0,095 647 88	83 13	13 565 5
35	1,75	0,025 904 22	-0,056 349 10	73 40	59 606 3
40	2,00	0,014 991 04	-0,032 985 39	0,000 060 83	0,261 848 6

$\varepsilon(x_n)$	$E_2^*(x_n)$	A_n'	$\varepsilon'(x_n)$
—0,000 001 6	0,000 065 99	0,000 041 20	—0,000 013 2
— 5 1	138 47	213 49	— 12 6
— 7 5	195 91	948 10	— 6 5
— 8 35	238 94	4 162 85	— 93
— 8 05	378 65	18 278 26	+ 2 78
— 7 07	310 66	80 280 9	+ 4 74
— 5 81	247 04	0,352 640 8	+ 5 22
—0,000 004 54	0,000 194 89	1,549 043 1	+0,000 004 88

Literatur

- [1] L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag, 2. Auflage (1955).
- [2] W. Uhlmann: Zur Fehlerabschätzung bei Interpolationspolynomen. Z. angew. Math. Mech., Bd. 37 (1957), S. 73/74.
- [3] W. Uhlmann: Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung. Z. angew. Math. Mech., Bd. 37 (1957), S. 99—111.

Eingegangen am 15. Mai 1956

Stress in a Plate Containing Infinite Parallel Rows of Holes

Von Hideo Saito in Sendai (Japan)

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Spannungsverteilung in einer Platte, die mit unendlichen Reihen von kreisförmigen Löchern perforiert ist, deren Mittelpunkte auf periodisch angeordneten horizontalen und vertikalen Geraden liegen. Die Platte befindet sich in einem Zustand verallgemeinerter ebener Spannung, der eine Zugspannung konstanter Richtung überlagert ist. Die Spannungen an den Lochrändern werden berechnet.

This paper deals with the stress distribution that occurs in a plate perforated by infinite rows of circular holes with centres placed periodically along the horizontal and vertical lines. The plate is in a state of generalized plane stress and subjected to uniform tension in a constant direction. The values of stresses at the edge of holes are computed.

Dans cet article il est question de la distribution de pression dans une plaque perforée par des rangées infinies de trous circulaires avec des centres placées périodiquement le long des lignes horizontales et verticales. La plaque se trouve dans un état de tension plane, et elle est soumise à une tension uniforme dans une direction constante. Les valeurs de tension aux bords des trous sont calculées.

В работе рассматривается распределение напряжений в пластинке, ослабленной круглыми отверстиями, центры которых периодически располагаются вдоль горизонтальных и вертикальных прямых. Пластинка находится в обобщённом плоском напряжённом состоянии и растягивается в определённом направлении. Вычисляются величины напряжений на краях отверстий.

1. Introduction

It is known that the presence of holes in a stressed plate has great influence upon the maximum stress and a number of investigations have been directed towards determining this influence for various loading conditions. The stress distribution for a single row of circular holes in a plate, which is subjected to tension in a direction normal to the line of holes has been determined by Howland [1]¹⁾, Hutter [2] and Schultz [3]. A solution for the two or three rows of holes with centres placed periodically along two or three parallel straight lines has also been given by Howland [4] and Schultz [3].

In this paper, the problem of a plate, under tension, perforated by infinite parallel rows of circular holes has been investigated.

2. Analysis

Fig. 1 shows a part of a plate under tension perforated by infinite rows of circular holes with centres placed periodically along the horizontal and vertical lines. The horizontal and vertical distances of the neighbouring centres are a and b and radii of holes are $a\lambda$. The tension p is in a direction at an angle α with the horizontal rows of holes. At the centre of each hole a set of rectangular axis is taken parallel to the row of holes. If $O_{m,n}$ is the centre of the horizontally m -th, vertically n -th hole, axes are taken at $O_{m,n}$ which may be denoted by $O_{m,n} x_{m,n}$, $O_{m,n} y_{m,n}$. Referred to these axes at $O_{m,n}$, a complex co-ordinate $\zeta_{m,n}$ may be defined as

$$\zeta_{m,n} = x_{m,n} + i y_{m,n} = a \varrho_{m,n} e^{i\varphi_{m,n}}, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

¹⁾ Numbers in square brackets refer to the Bibliography at the end of the paper.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varrho + \sigma_\vartheta &= 4 \operatorname{Re} \left[\sum_{t=2}^{\infty} A_t \varrho^{-t} e^{-it\vartheta} + \sum_{t=0}^{\infty} \varrho^t e^{it\vartheta} \sum_{s=2}^{\infty} A_s (-1)^s \alpha_{s,t} \right], \\ \sigma_\vartheta - \sigma_\varrho + 2i\tau_{\varrho\vartheta} &= 2 \left[- \sum_{t=2}^{\infty} t A_t \varrho^{-t} e^{-it\vartheta} + \sum_{t=0}^{\infty} B_t \varrho^{-t-2} e^{-it\vartheta} + \varrho e^{i\vartheta} \sum_{s=2}^{\infty} A_s (-1)^s \alpha_{s,1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=2}^{\infty} e^{it\vartheta} \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \{ A_s (t \varrho^t \alpha_{s,t} - \varrho^{t-2} \beta_{s+2,t-2}) + B_{s-2} \varrho^{t-2} \alpha_{s,t-2} \} \right] \end{aligned} \right\} \quad (11),$$

where the coefficients are defined as follows

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{s,t} &= \binom{s+t-1}{s-1} \sum_m \sum_n \left(\frac{q_{m,n}}{a} \right)^{-t-s} \\ &= \binom{s+t-1}{s-1} \left[\left(1 + (-1)^{s+t} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r_{m,0}^{s+t}} + 2 \cos(s+t) \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_{0,n}^{s+t}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(1 + (-1)^{s+t} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(s+t) \varphi_{m,n}}{r_{m,n}^{s+t}} \right], \\ \beta_{s,t} &= (s-2) \binom{s+t-2}{s-2} \sum_m \sum_n \frac{\bar{q}_{m,n}}{a} \left(\frac{q_{m,n}}{a} \right)^{-s-t+1} \\ &= (s-2) \binom{s+t-2}{s-2} \left[\left(1 + (-1)^{s+t} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r_{m,0}^{s+t-2}} + 2 \cos(s+t) \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_{0,n}^{s+t-2}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(1 + (-1)^{s+t} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(s+t) \varphi_{m,n}}{r_{m,n}^{s+t-2}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (12).$$

3. Determination of the Constants

If there were no holes in a plate subjected to uniform tensile stress p in a direction at an angle α above the positive x -axis (Fig. 1), the stress system would be given by

$$\sigma_{\varrho} + \sigma_{\theta} = p, \quad \sigma_{\theta} - \sigma_{\varrho} + 2i\tau_{\varrho\theta} = -p e^{i2(\theta-\alpha)} \quad (13).$$

Hence superposing the stress system (13) to (11) and applying the boundary conditions at the edge of holes

$$(\sigma_{\varrho})_{\varrho=\lambda} = (\tau_{\varrho\theta})_{\varrho=\lambda} = 0 \quad (14),$$

we obtain the following equations, by which the arbitrary constants are determined,

$$\left. \begin{aligned} -b_0 \lambda^{-2} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s} \alpha_{2s,0} &= \xi_0, \\ (2t+2) \lambda^{-2t} \binom{a_{2t}}{a_{2t}} - \lambda^{-2t-2} \binom{b_{2t}}{b_{2t}} + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{a_{2s}}{-a_{2s}} \{ -(2t-2) \lambda^{2t} \alpha_{2s,2t} + \lambda^{2t-2} \beta_{2s+2,2t-2} \} \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{-b_{2s-2}}{b_{2s-2}} \lambda^{2t-2} \alpha_{2s,2t-2} = \left(\frac{\xi_{2t}}{\xi_{2t}'} \right), \\ 2t \lambda^{-2t} \binom{a_{2t}}{-a_{2t}} + \lambda^{-2t-2} \binom{-b_{2t}}{b_{2t}} + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{a_{2s}}{a_{2s}} (2t \lambda^{2t} \alpha_{2s,2t} - \lambda^{2t-2} \beta_{2s+2,2t-2}) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{b_{2s-2}}{b_{2s-2}} \lambda^{2t-2} \alpha_{2s,2t-2} = \left(\frac{\eta_{2t}}{\eta_{2t}'} \right), \quad t = 1, 2, 3, \dots, \\ b_0' &= 0, \quad \binom{a_{2t+1}}{a_{2t+1}'} = \binom{b_{2t+1}}{b_{2t+1}'} = 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (15),$$

these are equivalent to

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= -\xi_0 \lambda^2 + 2 \lambda^2 \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s} \alpha_{2s,0}, \\ \binom{a_{2t}}{a_{2t}'} &= \frac{\lambda^{2t}}{2} \left\{ \left(\frac{\xi_{2t}}{\xi_{2t}'} \right) + \left(-\frac{\eta_{2t}}{\eta_{2t}'} \right) \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{a_{2s}}{-a_{2s}} \{ (2t-1) \lambda^{4t} \alpha_{2s,2t} - \lambda^{4t-2} \beta_{2s+2,2t-2} \} \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{b_{2s-2}}{-b_{2s-2}'} \lambda^{4t-2} \alpha_{2s,2t-2}, \\ \binom{b_{2t}}{b_{2t}'} &= \lambda^{2t+2} \left\{ t \left(\frac{\xi_{2t}}{\xi_{2t}'} \right) + (t+1) \left(-\frac{\eta_{2t}}{\eta_{2t}'} \right) \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{a_{2s}}{-a_{2s}} \{ 4t^2 \lambda^{4t+2} \alpha_{2s,2t} - (2t+1) \lambda^{4t} \beta_{2s+2,2t-2} \} \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{b_{2s-2}}{-b_{2s-2}'} (2t+1) \lambda^{4t} \alpha_{2s,2t-2} \end{aligned} \right\} \quad (16),$$

where

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= -\frac{p}{2}, \quad \xi_2 = -\frac{p}{2} \cos 2\alpha, \quad \xi_2' = -\frac{p}{2} \sin 2\alpha, \quad \xi_{2t} = \xi_{2t}' = 0, \\ \eta_2 &= \frac{p}{2} \cos 2\alpha, \quad \eta_2' = -\frac{p}{2} \sin 2\alpha, \quad \eta_{2t} = \eta_{2t}' = 0, \\ &\quad t = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \right\}$$

Since the case $\lambda = 0$ is the case when a plate has one hole, and since the constants a_{2t} , a'_{2t} , b_{2t} , b'_{2t} are functions of λ only, it seems logical to attempt a solution of equations (16) by a perturbation method in which λ is the perturbation parameter. We first write the constants in the forms

$$a_{2t} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2t}^{(j)} \lambda^{2t+j}, \quad b_{2t} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{2t}^{(j)} \lambda^{2t+j+2}, \quad a'_{2t} = \sum_{j=0}^{\infty} a'_{2t}^{(j)} \lambda^{2t+j}, \quad b'_{2t} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{2t}^{(j)} \lambda^{2t+j+2} \quad (17),$$

where

$$b_0^{(0)} = \frac{p}{2}, \quad a_2^{(0)} = -\frac{p}{2} \cos 2\alpha, \quad a_2'^{(0)} = -\frac{p}{2} \sin 2\alpha, \quad b_2^{(0)} = -\frac{3}{2} p \cos 2\alpha, \quad b_2'^{(0)} = -\frac{3}{2} p \sin 2\alpha,$$

$$a_{2t}^{(0)} = a_{2t}'^{(0)} = b_{2t}^{(0)} = b_{2t}'^{(0)} = 0, \quad t \geq 2$$

and $a_{2t}^{(j)}$, $a_{2t}'^{(j)}$, $b_{2t}^{(j)}$, $b_{2t}'^{(j)}$ are independent of λ .

We now substitute equations (17) to (16) and then equate to zero the coefficients of the various powers of λ which result. This leads to the equation

$$\left. \begin{aligned} b_0^{(j)} &= 2 \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s}^{(j-2s)} \alpha_{2s,0}, \\ \left(\begin{matrix} a_{2t}^{(j)} \\ a_{2t}'^{(j)} \end{matrix} \right) &= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\begin{matrix} a_{2s}^{(j-2t-2s)} \\ -a_{2s}'^{(j-2t-2s)} \end{matrix} \right) (2t-1) \alpha_{2s,2t} - \sum_{s=1}^{\infty} \left(\begin{matrix} a_{2s}^{(j-2t-2s+2)} \\ -a_{2s}'^{(j-2t-2s+2)} \end{matrix} \right) \beta_{2s+2,2t-2} \\ &\quad + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\begin{matrix} b_{2s}^{(j-2t-2s)} \\ -b_{2s}'^{(j-2t-2s)} \end{matrix} \right) \alpha_{2s+2,2t-2}, \\ \left(\begin{matrix} b_{2t}^{(j)} \\ b_{2t}'^{(j)} \end{matrix} \right) &= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\begin{matrix} a_{2s}^{(j-2t-2s)} \\ -a_{2s}'^{(j-2t-2s)} \end{matrix} \right) 4t^2 \alpha_{2s,2t} + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\begin{matrix} a_{2s}^{(j-2t-2s+2)} \\ -a_{2s}'^{(j-2t-2s+2)} \end{matrix} \right) (2t+1) \beta_{2s+2,2t-2} \\ &\quad + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\begin{matrix} b_{2s}^{(j-2t-2s)} \\ -b_{2s}'^{(j-2t-2s)} \end{matrix} \right) (2t+1) \alpha_{2s+2,2t-2} \end{aligned} \right\} \quad (18).$$

Equations (18) can be solved readily for $a_{2t}^{(j)}$, $a_{2t}'^{(j)}$, $b_{2t}^{(j)}$, $b_{2t}'^{(j)}$ in terms of their former terms. It is to be observed that the validity of the solution by such method depends upon the convergence of the series (17). To establish convergence of such series analytically is usually difficult. However calculations to $\lambda = 0.27$ showed the convergence of the series is sufficient. Calculations have

been carried out for the two cases $\alpha = b$, $\alpha = 0$ and $\frac{\pi}{4}$. The coefficients (12) have to be evaluated first and then equations (18) give the values of a_{2t} , b_{2t} , a'_{2t} , b'_{2t} . Any required stresses may then be found from the stress system (11) and (13). The values of σ_{θ}/p at the edge of holes are shown in table 1 and 2.

Table 1. Values of $\frac{(\sigma_{\theta})_{\theta=\lambda}}{p}$, ($\alpha = b$, $\alpha = 0$)

$\lambda =$	0	0.10	0.15	0.20	0.25	0.27
$\vartheta - \alpha = 0^\circ$	-1.00	-0.88	-0.76	-0.62	-0.46	-0.41
15°	-0.73	-0.63	-0.53	-0.43	-0.33	-0.29
30°	0	0.06	0.10	0.14	0.14	0.13
45°	1.00	1.00	0.99	0.97	0.94	0.91
60°	2.00	1.94	1.89	1.83	1.79	1.78
75°	2.73	2.64	2.54	2.46	2.40	2.39
90°	3.00	2.89	2.78	2.68	2.62	2.60

Table 2. Values of $\frac{(\sigma_{\theta})_{\theta=\lambda}}{p}$, ($\alpha = b$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$)

$\lambda =$	0	0.10	0.15	0.20	0.25	0.27
$\vartheta - \alpha = 0^\circ$	-1.00	-1.11	-1.23	-1.34	-1.41	-1.44
15°	-0.73	-0.83	-0.93	-1.03	-1.11	-1.12
30°	0	-0.06	-0.11	-0.16	-0.20	-0.20
45°	1.00	1.00	1.01	1.03	1.08	1.10
60°	2.00	2.06	2.12	2.19	2.26	2.30
75°	2.73	2.83	2.92	3.00	3.03	3.03
90°	3.00	3.11	3.21	3.29	3.29	3.26

In the above treatment, on account of the unending succession of holes, it is impossible to reach any place at which the tension is applied uniformly, or approximately so. However, as Howland has also mentioned in his paper [1], we may suppose the plate cut at two distant sections, the end being kept straight by rigid bars through which the tension is applied. Then, on St-Venant's principle, the corrections necessary for uniform tension will not be sensible except close to the ends.

In conclusion the author wishes to express his hearty thanks to Prof. Emeritus Seiichi Higuchi of the Tohoku University for his kind advice throughout the progress of the present investigation.

Bibliography

- [1] R. C. J. Howland, Proc. Roy. Soc., Vol. 148 (1935), p. 471.
- [2] A. Hutter, ZaMM., Vol. 22 (1942), p. 322.
- [3] K. J. Schulz, Advances in Applied Mechanics, edited by R. von Mises and T. von Karman, Vol. I (1948), p. 121, p. 167 (Academic Press Inc., Publishers, New York, N.Y.).
- [4] R. C. J. Howland, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Vol. 238 (1939), p. 357.

Eingegangen am 8. Februar 1956.

Der Membranspannungszustand in einer Rohrschlange

Von Werner Roth in Karlsruhe

In der vorliegenden Arbeit wird für schraubenförmig gewundene Rohre mit Kreisquerschnitt, welche durch Innendruck sowie durch Kräfte und Momente in dem Endquerschnitten belastet sind, der Spannungszustand ermittelt. Es gelingt, die im Sinne der Membrantheorie zuständigen Gleichungen für die Spannungen exakt zu integrieren.

For a helically twisted spiral tube of circular cross-section the state of stress is derived when the tube is under pressure and under the action of forces and moments acting at the tube ends. The membrane theory leads to equations that can be integrated exactly.

Dans l'article suivant l'état de tension est calculé pour des tuyaux enroulés en spirale avec section de cercle de chargés par une pression intérieure ainsi que par des forces et moments dans les sections extrêmeure ainsi que par des forces et moments dans les sections exêmes. On réussit à intégrer exactement les équations appropriées pour les tensions d'après de la théorie des membranes.

В предлагаемой работе определяется напряжённое состояние винтообразных труб с круглым поперечным сечением, нагруженных внутренним давлением, а также моментами и силами в концевых поперечных сечениях. Уравнения, действительные в мембранном напряжённом состоянии, интегрируются точно.

I. Einleitung

Wird ein gewundenes Rohr durch Innendruck belastet, so entsteht ein vom Schraubwinkel ϑ (Bild 2) unabhängiger Spannungszustand. Durch Einspannung der Rohrenden, oder auch durch Belastung der Rohrenden allein, kann ein zweiter Spannungszustand überlagert bzw. erzeugt werden. Die Berechnung gestaltet sich dann besonders einfach, wenn das Verhältnis des Rohrradius a zum Windungsradius R (Bild 1) klein ist. Für die Ermittlung der vom Innendruck herrührenden Spannungen kann ein gerades Rohrstück zugrunde gelegt werden; die von den in den Endquerschnitten angreifenden Kräfte und Momente verursachten Spannungen ergeben sich hinreichend genau über die Theorie des schwach gekrümmten Trägers. Im Folgenden soll jedoch gezeigt werden wie es möglich ist, den Spannungszustand streng für Rohrschlangen mit beliebigem Verhältnis a/R und beliebiger Steigung γ zu ermitteln. Es wird nur vorausgesetzt, daß die Wandstärke des Rohres klein genug ist, Querkräfte, Drill- und Biegemomente in der Rechnung also vernachlässigt werden können; die Voraussetzungen zur Anwendung der Membrantheorie damit erfüllt sind.

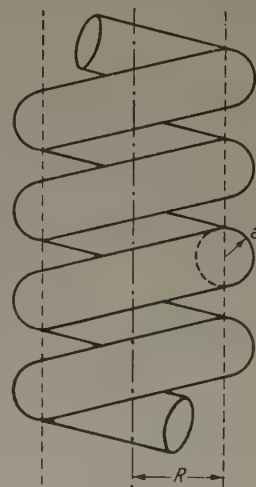


Bild 1.

II. Aufstellung der Gleichungen

Für die Lösung des Problems ist es wesentlich, das geeignete Koordinatensystem zu verwenden. Man denke sich eine Schraubenlinie (Skelett der Rohrschlange) mit der Gleichung

$$r = i \cdot R \cdot \cos \vartheta + j \cdot R \cdot \sin \vartheta + k \cdot R \cdot \vartheta \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

An dieser Schraubenlinie gleite das Frenetsche Dreibein (t, n, b) entlang (Bild 2). Denkt man sich den Nullpunkt des Dreibeins zusammenfallend mit dem Mittelpunkt eines am Dreibein befestigten Kreises derart, daß n und b zugleich Einheitsvektoren zweier Durchmesser dieses Kreises sind, so wird die Gesamtheit der

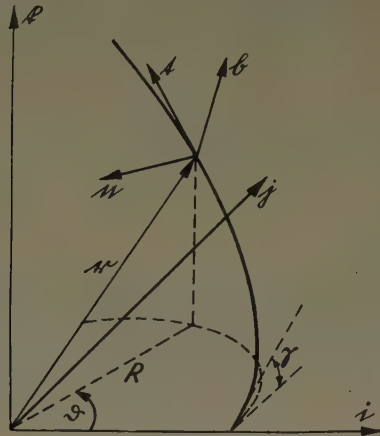


Bild 2

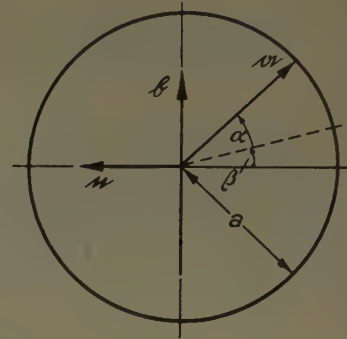


Bild 3

Umfangspunkte des Kreises beim Gleiten des Dreibeins längs der Schraubenlinie eine Fläche beschreiben, welche identisch ist mit der Mittelfläche der Rohrschlange (Bild 3).

Ein beliebiger Punkt auf der Mittelfläche wird beschrieben durch den Vektor

$$v = r + a$$

mit

$$a = -n \cdot a \cdot \cos \varphi + b \cdot a \cdot \sin \varphi$$

und

$$\varphi = \alpha + \beta.$$

Es wäre naheliegend, den Winkel φ als zweite unabhängige Koordinate neben der ersten Koordinate ϑ einzuführen; doch wäre damit ein ganz spezielles Koordinatennetz auf der Mittelfläche festgelegt, von dem erwartet werden muß, daß es schiefwinkelig sein wird. Wenn dagegen als zweite Gaußsche Koordinate α gewählt wird ist es möglich, durch Variation der Funktion $\beta(\vartheta)$ verschiedene Koordinatennetze herzuleiten. Demnach ist die additive Aufspaltung von φ in die zwei Winkel α und $\beta(\vartheta)$ zu bevorzugen. Das Gaußsche Koordinatennetz, welches orthogonal ist, wird aber für die Lösung des vorliegenden Problems jedenfalls am günstigsten sein. Für die Funktion $\beta(\vartheta)$ ist dann die Bedingung für Orthogonalität

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

determinierend. Nun ist

$$\frac{\partial r}{\partial \vartheta} = \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{d\vartheta} = t \cdot \lambda$$

mit

$$\lambda = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{R}{\cos \gamma}$$

für die Schraubenlinie. Die Ableitung des Vektors a ist

$$\frac{\partial a}{\partial \vartheta} = -\frac{dn}{ds} \cdot \lambda \cdot a \cdot \cos \varphi + n \cdot a \cdot \frac{d\beta}{d\vartheta} \cdot \sin \varphi + \frac{db}{ds} \cdot \lambda \cdot a \cdot \sin \varphi + b \cdot a \cdot \frac{d\beta}{d\vartheta} \cdot \cos \varphi.$$

Mit Hilfe der Zweiten und Dritten der Frenetschen Formeln

$$\frac{dt}{ds} = K \cdot n \quad \frac{dn}{ds} = -K \cdot t + T \cdot b \quad \frac{db}{ds} = -T \cdot n$$

findet man

$$\frac{\partial a}{\partial \vartheta} = t \cdot \lambda \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi + n \cdot a \left(\frac{d\beta}{d\vartheta} - \lambda \cdot T \right) \sin \varphi + b \cdot a \left(\frac{d\beta}{d\vartheta} - \lambda \cdot T \right) \cos \varphi$$

Damit ist

$$\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = t \cdot \lambda \cdot (1 + a K \cdot \cos \varphi) + n \cdot a \cdot \left(\frac{d\beta}{d\vartheta} - \lambda \cdot T \right) \sin \varphi + b \cdot a \cdot \left(\frac{d\beta}{d\vartheta} - \lambda \cdot T \right) \cos \varphi \quad \dots (2).$$

Entsprechend gilt

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = n \cdot a \cdot \sin \varphi + b \cdot a \cdot \cos \varphi$$

und damit folgt

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha} = n \cdot a \cdot \sin \varphi + b \cdot a \cdot \cos \varphi \quad \dots \quad (3).$$

Bedingung (1) geht über Gleichungen (2) und (3) über in

$$\frac{d\beta}{d\vartheta} - \lambda \cdot T = 0.$$

Soll für $\vartheta = 0$ $\beta = 0$ sein, dann ist die Lösung dieser Differentialgleichung

$$\beta = \vartheta \cdot \lambda \cdot T.$$

Die Funktion $\beta(\vartheta)$ kann so gedeutet werden, daß sie der Drehung des Frenetschen Dreibeins beim Gleiten längs der Skelettlinie entgegengesetzt ist und mit dieser dem Betrag nach übereinstimmt. Es ist nämlich

$$T = \frac{d\varepsilon}{ds}.$$

(Die Torsion der Schraubenlinie ist gleich der Änderung des Drehwinkels ε des Dreibeins um die Tangente t bezogen auf das zurückgelegte Wegelement ds der Skelettlinie.) Für ds gilt

$$ds = \frac{R}{\cos \gamma} \cdot d\vartheta = \lambda \cdot d\vartheta.$$

So folgt für T

$$T = \frac{d\varepsilon}{\lambda \cdot d\vartheta} = \frac{1}{R} \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma \quad \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \lambda \cdot T.$$

Beginnt man die Drehung von $\vartheta = 0$ an zu zählen, dann ist

$$\varepsilon = \vartheta \cdot \lambda \cdot T$$

gleich dem Winkel β . Dadurch, daß die zweite Gaußsche Koordinate von dem Radius gezählt wird, welcher mit der negativen n -Achse des Frenetschen Dreibeins den Winkel β einschließt, erreicht man, daß die Drehung des Dreibeins gewissermaßen aufgehoben wird (Bild 3). (Es ist so leicht einzusehen, daß das konstruierte Koordinatennetz auf der Mittelfläche der Rohrschlange tatsächlich orthogonal ist.

Ein Element der Rohrwand wird fixiert durch die Koordinaten ϑ und α , begrenzt durch die Längendifferentiale ds_1 , $d\bar{s}_1$, ds_2 und $d\bar{s}_2$ (Bild 4).

Der Einheitsvektor bei Fortschreiten in Richtung ϑ ist aus

$$\frac{\partial b}{\partial \vartheta} = t \cdot \lambda \cdot (1 + a K \cdot \cos \varphi)$$

gleich dem Tangentenvektor t der Schraubenlinie. Der Einheitsvektor bei Fortschreiten in Richtung α ist aus

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha} = n \cdot a \sin \varphi + b \cdot a \cdot \cos \varphi$$

zu bestimmen und ergibt sich zu

$$m = n \cdot \sin \varphi + b \cdot \cos \varphi.$$

Für den Einheitsvektor senkrecht zur Mittelfläche folgt

$$N = (t \times m) = b \cdot \sin \varphi - n \cdot \cos \varphi.$$

Durch ein Differential $d\vartheta$ wird an der Stelle (ϑ, α) die Kantenlänge des Elements

$$ds_2 = \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta \right| = \lambda \cdot (1 + a K \cdot \cos \varphi) d\vartheta$$

beschrieben. An der Stelle $(\vartheta, \alpha + d\alpha)$ ist dagegen

$$d\bar{s}_2 = ds_2 - \lambda \cdot a \cdot K \cdot \sin \varphi \cdot d\alpha \cdot d\vartheta.$$

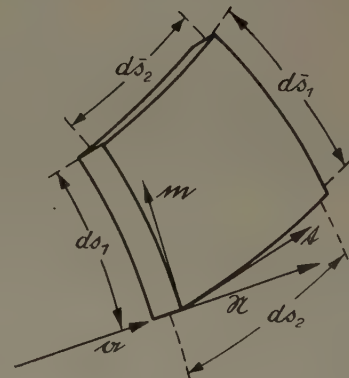


Bild 4

Entsprechend wird durch ein Differential $d\alpha$ an den Stellen (ϑ, α) bzw. $(\vartheta + d\vartheta, \alpha)$ die Kantenlänge

$$ds_1 = d\bar{s}_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \alpha} \cdot d\alpha \right| = a \cdot d\alpha$$

festgelegt, (Bild 4) wobei Differentiale dritter Ordnung vernachlässigbar sind.

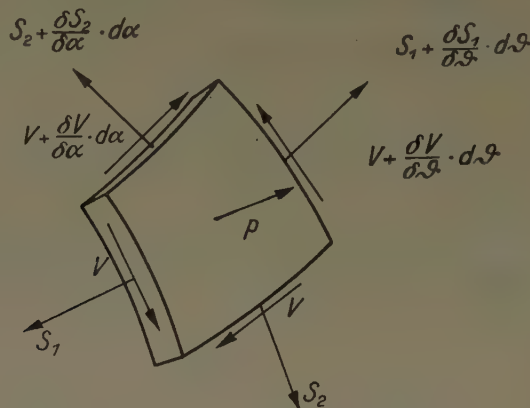


Bild 5

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich, die am herausgeschnittenen Element angreifenden Kräfte, verursacht durch die Schnittkräfte S_1 , S_2 und V und der Flächenbelastung p , ins Gleichgewicht zu setzen. (Bild 5.) Von der Flächenbelastung p kann angenommen werden, daß sie konstant ist und die Richtung senkrecht zur Tangentialfläche der Rohrschlange hat. (Technisch interessierender Fall.) Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\begin{aligned} & \left(t + \frac{\partial t}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta \right) \cdot \left(S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta \right) d\bar{s}_1 + \left(m + \frac{\partial m}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta \right) \cdot \left(V + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta \right) d\bar{s}_1 \\ & + \left(m + \frac{\partial m}{\partial \alpha} \cdot d\alpha \right) \cdot \left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha} \cdot d\alpha \right) d\bar{s}_2 + \left(t + \frac{\partial t}{\partial \alpha} \cdot d\alpha \right) \cdot \left(V + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \cdot d\alpha \right) d\bar{s}_2 \\ & - t \cdot S_1 \cdot ds_1 - m \cdot V \cdot ds_1 - m \cdot S_2 \cdot ds_2 - t \cdot V \cdot ds_2 + \mathfrak{N} \cdot p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0. \end{aligned}$$

Hier kommen noch die Vektoren

$$\frac{\partial t}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial m}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial \alpha} = -\mathfrak{N}$$

vor. Man erhält für sie (über die Frenetschen Formeln):

$$\frac{\partial t}{\partial \vartheta} = n \cdot \lambda \cdot K = m \cdot \lambda \cdot K \cdot \sin \varphi - \mathfrak{N} \cdot \lambda \cdot K \cdot \cos \varphi \quad \frac{\partial m}{\partial \vartheta} = -t \cdot \lambda \cdot K \cdot \sin \varphi.$$

Drückt man so alle Vektoren durch die Einheitsvektoren t , m und \mathfrak{N} aus, dann zerfällt schließlich die obige Vektorgleichung in das System partieller Differentialgleichungen für die Schnittkräfte S_1 , S_2 und V :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \cdot (1 + a \cdot K \cos \varphi) - V \cdot 2 a K \sin \varphi + \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta} \cdot \frac{a}{\lambda} &= 0 \\ \frac{\partial S_2}{\partial \alpha} (1 + a K \cos \varphi) + S_1 \cdot a K \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot \frac{a}{\lambda} &= 0 \\ S_2 \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) + S_1 \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi &= p \cdot a \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

Für die weitere Behandlung dieser Gleichungen ist es zweckmäßig, als unabhängige Veränderliche die Koordinaten

$$\varphi = \alpha + \beta \quad \psi = \vartheta$$

zu substituieren. Das System (4) geht dann über in das System:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) - V \cdot 2 \cdot a \cdot K \cdot \sin \varphi + \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \cdot a \cdot T + \frac{\partial S_1}{\partial \psi} \cdot \frac{a}{\lambda} &= 0 \\ \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) + S_1 \cdot a \cdot K \cdot \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot a \cdot T + \frac{\partial V}{\partial \psi} \cdot \frac{a}{\lambda} &= 0 \\ S_2 \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) + S_1 \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi &= p \cdot a \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \dots (4)'. \quad \cdot \cdot \cdot$$

III. Zusammenstellung der Lösungen

Die einfachste Lösung des Systems (4)' beschreibt den Fall einer durch konstanten Innendruck p belasteten Rohrschlange, deren Enden durch zwei Deckel abgeschlossen sind. Zur Herleitung dieser Lösung dient das Analogon, daß in einem geraden, unter Innendruck stehenden Rohr keine Schubspannungen vorhanden sind. Es ist demnach auch für die Rohrschlange der Ansatz $V = 0$ naheliegend. Wegen Unabhängigkeit der Spannungen vom Schraubenwinkel $\psi = \vartheta$ gehen die Gl. (4)' über in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial S_2 (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi)}{\partial \varphi} + S_1 \cdot a \cdot K \cdot \sin \varphi &= 0 \\ S_2 \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) + S_1 \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi &= p \cdot a \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \dots (4)''$$

Die Erste der Gl. (4)'' liefert $S_1 = c_1 = \text{konstant}$. Die zweite Gleichung führt zu

$$S_2 \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) = c_1 \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi + c_2.$$

Dies in die Dritte der Gl. (4)'' eingesetzt bringt das Ergebnis:

$$c_1 = \frac{p \cdot a}{2} \quad c_2 = p \cdot a.$$

Damit beschreiben also die Gleichungen

$$S_1 = \frac{p \cdot a}{2} \quad S_2 = p \cdot a \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{2} a \cdot K \cdot \cos \varphi\right)}{(1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi)} \quad V = 0 \quad \dots (5)$$

den in der Rohrschlange herrschenden Spannungszustand. Für die Krümmung K (erste Krümmung der Skelettlinie) ist zu setzen

$$K = \frac{1}{R} \cdot \cos^2 \gamma.$$

Die Extremalwerte der Spannung S_2 sind an den Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ zu finden. Es gilt:

$$\frac{S_{2\max}}{p \cdot a} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2} a \cdot K\right)}{(1 - a \cdot K)} \quad \frac{S_{2\min}}{p \cdot a} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} a \cdot K\right)}{(1 + a \cdot K)}.$$

Für die Praxis von Bedeutung sind diese Verhältnisse als Funktion von $a \cdot k$. Eine einfache Betrachtung zeigt aber, daß es nur sinnvoll ist für die Werte $a \cdot k$, welche der Bedingung $0 < a \cdot k < 1$ genügen, eine Diskussion vorzunehmen. Ein Rohrelement der Rohrschlange, dessen Skelettlinie die Länge ds hat, bildet sich in der Schmiegeebene nach Bild 6 ab. Die Skelettlinie hat hier den Krümmungsradius $R' = R/\cos^2 \gamma$ und aus geometrischen Gründen muß aber $a < R'$ sein (Bild 6). Daraus folgt

$$\frac{a}{R'} = \frac{a}{R} \cdot \cos^2 \gamma = a \cdot k < 1.$$

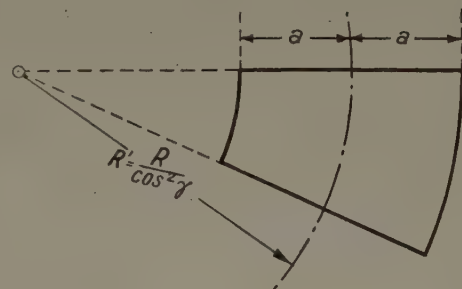


Bild 6

Die untere Schranke Null liegt sofort auf der Hand, da das Verhältnis a/R' beliebig klein gemacht werden kann.

Zahlentafel

$a \cdot k$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
$S_{2\max}/p \cdot a$	1,0000	1,1250	1,3333	1,7500	3,0000	5,5000	∞
$S_{2\min}/p \cdot a$	1,0000	0,9167	0,8571	0,8125	0,7778	0,7632	0,7500

Das Schaubild (Bild 7) läßt deutlich erkennen, daß mit abnehmendem Windungsradius R ein starkes Ansteigen der Spannung S_2 an der Innenseite der Rohrschlange zu erwarten ist. (Kerbwirkung.)

Legt man einen Schnitt senkrecht zur Skelettlinie, dann greift an diesem Querschnitt eine resultierende Kraft

$$\mathfrak{P} = \int_0^{2\pi} t \cdot S_1 \cdot a \cdot d\varphi + \int_0^{2\pi} m \cdot V \cdot a \cdot d\varphi = t \cdot \pi \cdot a^2 \cdot p$$

und ein resultierendes Moment bezogen auf den Nullpunkt des diesem Querschnitt zugeordneten Frenetschen Dreiecks

$$\mathfrak{M} = \int_0^{2\pi} (a \times t) \cdot S_1 \cdot a \cdot d\varphi + \int_0^{2\pi} (a \times m) \cdot V \cdot a \cdot d\varphi = 0$$

an. Ein aufgesetzter Deckel würde aber unter Wirkung des Innendruckes p gerade eine Kraft von dieser Größe und ein Moment $M = 0$ auf die Rohrschlange ausüben. Wenn man also von den

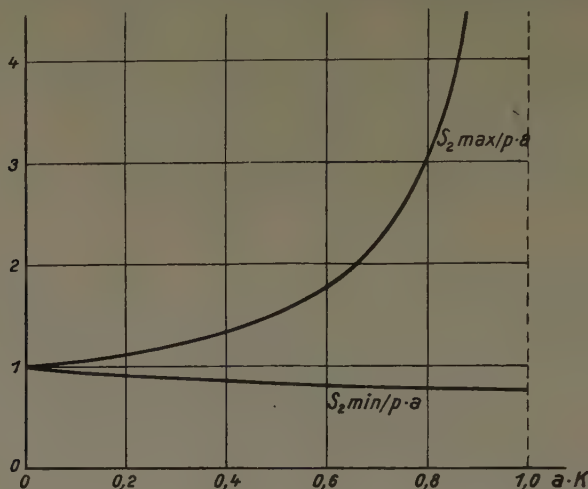


Bild 7

Verformungsbedingungen zwischen Deckel und Rohrschlange absieht, stellt sich der ermittelte Spannungszustand ein. Die Berücksichtigung der Formänderungen könnte zu auftretenden Biege- und Drillmomenten in der Nähe der Schweißnaht des aufgesetzten Deckels führen, doch schon nach geringer Entfernung werden diese Momente abgeklungen sein, so daß der Membranspannungszustand übrig bleibt.

Die allgemeine Lösung der Gl. (4)' setzt sich additiv zusammen aus der oben hergeleiteten partikulären Lösung (5) des Systems (4)'' und der Lösung des homogenen Systems

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) - V \cdot 2 a \cdot K \cdot \sin \varphi + \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \cdot a \cdot T + \frac{\partial S_1}{\partial \psi} \cdot \frac{a}{\lambda} &= 0 \\ \frac{\partial S_2 (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi)}{\partial \varphi} + S_1 \cdot a \cdot K \cdot \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot a \cdot T + \frac{\partial V}{\partial \psi} \cdot \frac{a}{\lambda} &= 0 \\ S_2 (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) + S_1 \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Für Lösungen, welche vom Schraubenwinkel $\psi = \vartheta$ unabhängig sind, vereinfachen sich die Gl. (6) auf

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{d\varphi} \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) - V \cdot 2 a \cdot K \cdot \sin \varphi + \frac{dS_1}{d\varphi} \cdot a \cdot T &= 0 \\ \frac{dS_2 (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi)}{d\varphi} + S_1 \cdot a \cdot K \cdot \sin \varphi + \frac{dV}{d\varphi} \cdot a \cdot T &= 0 \\ S_2 \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) + S_1 \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)'$$

Mit der Substitution $x = \cos \varphi$ geht dieses System über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} \cdot (1 + a \cdot K \cdot x) + V \cdot 2 a \cdot K + \frac{dS_1}{dx} \cdot a \cdot T &= 0 \\ \frac{dS_2 (1 + a \cdot K \cdot x)}{dx} - S_1 \cdot a \cdot K + \frac{dV}{dx} \cdot a \cdot T &= 0 \\ S_2 \cdot (1 + a \cdot K \cdot x) + S_1 \cdot a \cdot K \cdot x &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)''$$

Aus der Letzten der Gl. (6)'' folgt

$$S_2 = -S_1 \cdot \frac{a \cdot K \cdot x}{(1 + a \cdot K \cdot x)} \dots \dots \dots (7).$$

Eliminiert man S_2 aus den beiden ersten Gleichungen des Systems (6)'' dann erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} \cdot (1 + a \cdot K \cdot x) + V \cdot 2 a \cdot K + \frac{dS_1}{dx} \cdot a \cdot T &= 0 \\ \frac{dS_1}{dx} \cdot a \cdot K \cdot x + S_1 \cdot 2 a \cdot K - \frac{dV}{dx} \cdot a \cdot T &= 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich noch auf eine einzige Differentialgleichung reduzieren, wenn man aus der ersten Gleichung

$$\frac{dS_1}{dx} = -\frac{dV}{dx} \cdot \frac{(1 + a \cdot K \cdot x)}{a \cdot T} - V \cdot \frac{2 K}{T} \dots \dots \dots (8)$$

in die differentiierte zweite Gleichung einsetzt. Das Ergebnis ist:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} \cdot \left(x^2 + \frac{x}{a \cdot K} + \frac{T^2}{K^2} \right) + \frac{dV}{dx} \cdot 6 \cdot \left(x + \frac{1}{2 a \cdot K} \right) + V \cdot 6 = 0 \dots \dots \dots (9).$$

Die Spannung V wird also durch eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung bestimmt, deren veränderliche Koeffizienten Polynome sind. Über den Reihenansatz

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \cdot x^{(p+n)} \dots \dots \dots (10)$$

ist es möglich, das Integral von (9) zu finden. Das Bildungsgesetz der Koeffizienten b_n wird hier so einfach, daß sich leicht die Summenformel der Reihe (10) angeben läßt. Man erhält schließlich nach Durchführung der Rechnung als erstes und zweites Partikularintegral

$$V_1 = \frac{1}{(x - \xi_1)^2} \quad V_2 = \frac{1}{(x - \xi_2)^2} \dots \dots \dots (11).$$

Die Größen ξ_1 und ξ_2 sind die singulären Stellen der Differentialgleichung (9). Es ist

$$\xi_1 = -\frac{1}{2 a K} \cdot [1 + \sqrt{1 - 4 a^2 T^2}] \quad \xi_2 = -\frac{1}{2 a K} \cdot [1 - \sqrt{1 - 4 a^2 T^2}].$$

In den Lösungen (11) ist die Diskriminante

$$\Delta = 1 - 4 a^2 \cdot T^2$$

größer als Null angenommen, so daß beide singuläre Stellen reell und voneinander verschieden sind. Für den Fall $\Delta = 0$, also $\xi_1 = \xi_2$, erhält man als Partikularintegrale

$$V_1 = \frac{1}{(x - \xi_1)^2} \quad V_2 = \frac{1}{(x - \xi_1)^3}.$$

Ist endlich $\Delta < 0$, dann sind

$$V_1 = \frac{[(x - \delta)^2 - \omega^2]}{[(x - \delta)^2 + \omega^2]^2} \quad V_2 = \frac{(x - \delta)}{[(x - \delta)^2 + \omega^2]^2}$$

die Partikularlösungen von (9). Hier ist

$$\xi_1 = \delta + i \cdot \omega \quad \xi_2 = \delta - i \cdot \omega$$

gesetzt; also gilt

$$\delta = -\frac{1}{2 a K} \quad \omega = -\frac{1}{2 a K} \cdot \sqrt{4 a^2 T^2 - 1}.$$

Mit der nun bekannten Funktion V ist es möglich über Gl. (8) durch Integration die Spannung S_1 und über (7) dann S_2 zu ermitteln. Nach unwesentlicher Rechnung erhält man nach Rücktransformation auf die Veränderliche φ zusammengefaßt; für $\Delta > 0$

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{c_1}{(\cos \varphi - \xi_1)^2} + \frac{c_2}{(\cos \varphi - \xi_2)^2} \\ S_1 &= -\frac{c_1}{a \cdot T} \cdot \frac{(1 + a \cdot K \cdot \xi_1)}{(\cos \varphi - \xi_1)^2} - \frac{c_2}{a \cdot T} \cdot \frac{(1 + a \cdot K \cdot \xi_2)}{(\cos \varphi - \xi_2)^2} \\ S_2 &= c_1 \cdot \frac{K}{T} \cdot \frac{(1 + a \cdot K \cdot \xi_1) \cos \varphi}{(1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) \cdot (\cos \varphi - \xi_1)^2} + c_2 \cdot \frac{K}{T} \cdot \frac{(1 + a \cdot K \cdot \xi_2) \cdot \cos \varphi}{(1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) \cdot (\cos \varphi - \xi_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

für $\Delta = 0$

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{c_1}{(\cos \varphi - \xi_1)^2} + \frac{c_2}{(\cos \varphi - \xi_1)^3} \\ S_1 &= -\frac{c_1}{(\cos \varphi - \xi_1)^2} - c_2 \cdot \left[\frac{a \cdot K}{(\cos \varphi - \xi_1)^2} + \frac{1}{(\cos \varphi - \xi_1)^3} \right] \\ S_2 &= \frac{c_1 \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi}{(1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) \cdot (\cos \varphi - \xi_1)^2} \\ &\quad + \frac{c_2 \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi}{(1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi)} \cdot \left[\frac{a \cdot K}{(\cos \varphi - \xi_1)^2} + \frac{1}{(\cos \varphi - \xi_1)^3} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

und für $\Delta < 0$

$$\left. \begin{aligned} V &= c_1 \cdot \frac{[(\delta - \cos \varphi)^2 - \omega^2]}{[(\delta - \cos \varphi)^2 + \omega^2]^2} + c_2 \cdot \frac{(\cos \varphi - \delta)}{[(\delta - \cos \varphi)^2 + \omega^2]^2} \\ S_1 &= -c_1 \cdot \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{[(\delta - \cos \varphi)^2 + \omega^2]^2} \cdot [-\delta \cdot \cos^2 \varphi + 2 \cdot (\delta^2 - \omega^2) \cos \varphi + \delta (3 \omega^2 - \delta^2)] \\ &\quad - c_2 \cdot \frac{K}{2 \cdot T} \cdot \frac{1}{[(\delta - \cos \varphi)^2 + \omega^2]^2} \cdot [\cos^2 \varphi - 4 \cdot \delta \cdot \cos \varphi + (3 \delta^2 - \omega^2)] \\ S_2 &= c_1 \cdot \frac{K}{T} \cdot \frac{a \cdot K \cdot \cos \varphi}{(1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi)} \cdot \frac{1}{[(\delta - \cos \varphi)^2 + \omega^2]^2} \cdot [-\delta \cos^2 \varphi + 2 \cdot (\delta^2 - \omega^2) \cdot \cos \varphi \\ &\quad + \delta (3 \omega^2 - \delta^2)] \\ &\quad + c_2 \cdot \frac{K}{2 \cdot T} \cdot \frac{a \cdot K \cdot \cos \varphi}{(1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi)} \cdot \frac{1}{[(\delta - \cos \varphi)^2 + \omega^2]^2} \cdot [\cos^2 \varphi - 4 \delta \cdot \cos \varphi + (3 \delta^2 - \omega^2)] \end{aligned} \right\} (14).$$

Die Lösungen (12), (13) und (14) enthalten jeweils zwei Integrationskonstanten c_1 und c_2 . Sie beschreiben den Fall einer durch Axialkraft und Axialmoment belasteten Rohrschlange (die Wirkungslinien von Kraft und Moment fallen mit der Schraubenachse zusammen), wobei durch Superposition der Lösung (5) noch die Belastung durch Innendruck berücksichtigt werden kann. Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied im Charakter der einzelnen Lösungen. Betrachtet man z. B. die erste Gruppe (12) $\Delta > 0$ und setzt voraus, daß das Verhältnis $a/R = \nu < 1$ sei, dann kann man leicht zeigen, daß die singulären Stellen ξ_1 und ξ_2 den Ungleichungen

$$\xi_1 < -1 \quad -1 < \xi_2 < 0$$

genügen. In einem beliebigen Schnitt senkrecht zur Skelettlinie greifen aber die Kraft

$$\mathfrak{P} = \oint t \cdot S_1 \cdot ds_1 + \oint m \cdot V \cdot ds_1 = t \cdot a \cdot \int_0^{2\pi} S_1 \cdot d\varphi + b \cdot a \cdot \int_0^{2\pi} V \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \dots (15)$$

und das Moment (bezogen auf den Nullpunkt des begleitenden Dreibeins)

$$\mathfrak{M} = \oint (a \times t) S_1 ds_1 + \oint (a \times m) V ds_1 = b \cdot a^2 \cdot \int_0^{2\pi} S_1 \cdot \cos \varphi d\varphi - t a^2 \int_0^{2\pi} V \cdot d\varphi \dots (16)$$

an. Hier treten die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi - \xi_2)^2} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{(\cos \varphi - \xi_2)^2}$$

auf, welche wegen $0 > \xi_2 > -1$ divergieren. Bei beliebiger Vorgabe des Axialmomentes und der Axialkraft ist also kein Membranspannungszustand in der Rohrschlange möglich. Es treten an der Stelle $\cos \varphi = \xi_2$ vielmehr unendlich große Spannungen auf, die es unmöglich machen, Gln. (15) und (16) zu erfüllen. Verzichtet man auf das Partikularintegral mit der singulären Stelle ξ_2 , setzt also $c_2 = 0$, so erhält man nach Auswertung von Gl. (15)

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{f} \frac{2\pi \cdot a}{(\sqrt{\xi_1^2 - 1})^3} \cdot \frac{c_1}{\cos \gamma} \quad P = \frac{2\pi \cdot a}{(\sqrt{\xi_1^2 - 1})^3} \cdot \frac{c_1}{\cos \gamma} \dots \dots \dots (15)'$$

und aus Gl. (16)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{l} \cdot P \cdot R - \mathfrak{f} \cdot P \cdot a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma \left(\xi_1 - \frac{1}{\xi_1} \right) \dots \dots \dots (16)'$$

(\mathfrak{l} ist ein Einheitsvektor im Nullpunkt des Frenetschen Dreibeins angeheftet, senkrecht stehend zu dem Einheitsvektor \mathfrak{f} und der Projektion des Vektors \mathfrak{r} auf die (i ; j) Ebene, dem Radius R ;

positiv gerechnet im Sinne zunehmenden Winkels ϑ .) Wäre das Rohr nach Art einer Feder belastet, so müßte das Moment (Axialmoment)

$$M_z = -P \cdot a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot \left(\xi_1 - \frac{1}{\xi_1} \right)$$

Null sein. Diese Bedingung kann durch Verlust des zweiten Integrals eben jetzt nicht mehr erfüllt werden. Beschränkt man sich auf kleine Steigungen, setzt also wie üblich $\sin \gamma = \gamma$, $\cos \gamma = 1$, dann ist

$$\frac{M_z}{P \cdot R} = \gamma \cdot (1 - \nu^2)$$

und für hinreichend kleine Werte γ oder hinreichend bei eins gelegenen Werten ν kann gesagt werden, daß das Moment M_z vernachlässigbar klein wird gegen das Moment $P \cdot R$, so daß näherungsweise der Federspannungszustand vorliegt. Im Fall $\Delta = 0$ (13) führt die Forderung $\xi_1 < -1$ (Möglichkeit für das Eintreten eines stetigen Membranspannungszustandes) zu der Ungleichung

$$2 \cdot \nu \cdot \cos^2 \gamma < 1$$

Wegen $\Delta = 0$ muß aber auch

$$\nu \cdot \sin 2\gamma = 1. \quad \dots \quad (17)$$

sein. Daraus resultiert die Ungleichung $\tan \gamma > 1$. Die Steigung der Rohrschlange muß also größer als 45 Grad sein und das Verhältnis ν muß der Bedingung (17) genügen. Von der Lösung (14) schließlich sind beide Partikularintegrale brauchbar; doch führt die einschränkende Bedingung $\Delta < 0$ auf die Aussage

$$\nu \cdot \sin 2\gamma > 1.$$

Diese Ungleichung fordert von vornherein $\nu > 1$. Wenn keine Selbstdurchdringung vorliegen soll, so heißt das, daß nur Rohrschlangen mit großer Steigung durch die Lösung (14) erfaßt werden. Krümmung und Windung werden dann sehr klein, so daß im Grenzfall ein gerades Rohr vorliegt.

Ausgangspunkt zur Herleitung allgemeinerer, vom Schraubenwinkel ϑ abhängiger Lösungen sind die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot (1 + a \cdot K \cdot \cos \varphi) - V \cdot 2a \cdot K \cdot \sin \varphi + \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \cdot a \cdot T + \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta} \cdot \frac{a}{\lambda} &= 0 \\ -\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \cdot a \cdot K \cdot \cos \varphi + S_1 \cdot 2a \cdot K \cdot \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot a \cdot T + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot \frac{a}{\lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6)'''$$

(Man erhält sie aus dem System 6, wenn S_2 eliminiert wird.) Es ist möglich, die Lösungen der Gln. (6)''' nach Potenzen der Steigung γ zu entwickeln. Verwendet man die Beziehungen

$$\begin{aligned} a \cdot K &= \nu \cdot \cos^2 \gamma = \nu \cdot \left(1 - \gamma^2 + \frac{1}{3} \cdot \gamma^4 \dots \right) \\ a \cdot T &= \nu \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma = \nu \cdot \left(\gamma - \frac{2}{3} \gamma^3 + \frac{2}{15} \gamma^5 \dots \right) \\ \frac{a}{\lambda} &= \nu \cdot \cos \gamma = \nu \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{1}{24} \gamma^4 \dots \right) \end{aligned}$$

und geht mit den Ansätzen

$$\begin{aligned} V &= V_0 + V_1 \gamma + V_2 \gamma^2 + V_3 \gamma^3 + \dots \\ S_1 &= S_{10} + S_{11} \gamma + S_{12} \gamma^2 + S_{13} \gamma^3 + \dots \end{aligned}$$

in die Gln. (6)''' ein, dann resultieren daraus die Systeme partieller Differentialgleichungen für die V_i und S_{1i} : ($i = 0 \dots \infty$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi) - V_0 \cdot 2 \cdot \nu \cdot \sin \varphi + \frac{\partial S_{10}}{\partial \vartheta} \cdot \nu &= 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi) - V_1 \cdot 2 \cdot \nu \cdot \sin \varphi + \frac{\partial S_{11}}{\partial \vartheta} \cdot \nu &= -\frac{\partial S_{10}}{\partial \varphi} \cdot \nu \\ \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi) - V_2 \cdot 2 \cdot \nu \cdot \sin \varphi + \frac{\partial S_{12}}{\partial \vartheta} \cdot \nu &= -\frac{\partial S_{10}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\nu}{2} - \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial S_{11}}{\partial \varphi} \cdot \nu \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial S_{10}}{\partial \varphi} \cdot \cos \varphi + S_{10} \cdot 2 \cdot \sin \varphi + \frac{\partial V_0}{\partial \vartheta} &= 0 \\ -\frac{\partial S_{11}}{\partial \varphi} \cdot \cos \varphi + S_{11} \cdot 2 \cdot \sin \varphi + \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} &= -\frac{\partial V_0}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial S_{12}}{\partial \varphi} \cdot \cos \varphi + S_{12} \cdot 2 \cdot \sin \varphi + \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_0}{\partial \vartheta} - \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

(Die Erste der beiden Gln. (6)''' geht über in das System (18), die Zweite der Gln. (6)''' geht über in das System (19).) Die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} (1 + \nu \cdot \cos \varphi) - V_0 \cdot 2 \cdot \nu \cdot \sin \varphi + \frac{\partial S_{10}}{\partial \vartheta} \cdot \nu &= 0 \\ -\frac{\partial S_{10}}{\partial \varphi} \cdot \cos \varphi + S_{10} \cdot 2 \cdot \sin \varphi + \frac{\partial V_0}{\partial \vartheta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

liefern die Grundlösungen der Systeme (18) und (19). Diese Lösungen beschreiben den Spannungszustand im Fall $\gamma = 0$. Rekursiv ist es dann möglich, mit V_0 und S_{10} aus den Systemen (18) und (19) die V_i und S_{1i} ($i = 1 \dots \infty$) zu entwickeln. Nach Elimination von S_{10} aus (20) ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \varphi^2} \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi) \cos \varphi - \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} \cdot \sin \varphi (2 + 5 \cdot \nu \cdot \cos \varphi) + V_0 \cdot \nu \cdot (4 - 6 \cdot \cos^2 \varphi) + \frac{\partial^2 V_0}{\partial \vartheta^2} \cdot \nu = 0 \quad \dots (21)$$

für V_0 zuständig. Da sich die resultierenden Kräfte und Momente in einem Querschnitt des Rohres mit $\sin \vartheta$ bzw. $\cos \vartheta$ ändern müssen, hat (21) die Lösungen

$$V_0 = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot F(\varphi).$$

Für $F(\varphi)$ erhält man damit die gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi) \cos \varphi - \frac{dF}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot (2 + 5 \cdot \nu \cdot \cos \varphi) + F \cdot \nu \cdot (3 - 6 \cdot \cos^2 \varphi) = 0 \quad \dots (22).$$

Mit der Substitution

$$F = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{dy}{d\varphi}$$

geht diese Gleichung über in

$$\frac{d^3 y}{d\varphi^3} \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi) - \frac{d^2 y}{d\varphi^2} \cdot 3 \nu \cdot \sin \varphi + \frac{dy}{d\varphi} \cdot (1 - 2 \nu \cdot \cos \varphi) = 0 \quad \dots (22)'$$

Die Gleichung gestattet eine erste Integration; es wird

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi) - \frac{dy}{d\varphi} \cdot 2 \cdot \nu \cdot \sin \varphi + y = C \quad \dots (22)''$$

wo C eine beliebige Konstante ist. Mit der weiteren Substitution

$$y = \frac{z}{(1 + \nu \cdot \cos \varphi)} + C$$

gelingt die Transformation von (22)'' auf die einfache Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z = 0$$

welche die Partikularlösungen

$$z_1 = \sin \varphi \quad z_2 = \cos \varphi$$

besitzt. Damit ist nun aber auch die Funktion $F(\varphi)$ gewonnen; sie besteht aus den Partikularintegralen (wie man durch Rücksubstitution findet)

$$F_1 = \frac{(\nu + \cos \varphi)}{\cos \varphi \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi)^2} \quad F_2 = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{(1 + \nu \cdot \cos \varphi)^2}.$$

Eine vorläufige Lösung von Gl. (21) ist damit gegeben durch

$$V_0 = (A_1 \cdot F_1 + A_2 \cdot F_2) \cdot \cos \vartheta + (B_1 \cdot F_1 + B_2 \cdot F_2) \cdot \sin \vartheta.$$

Nun kann noch eine vom Winkel ϑ unabhängige Funktion überlagert werden, welche auch eine Lösung von (21) ist und einen rotationssymmetrischen Spannungszustand beschreibt. Diese Funktion ist schon bekannt. Sie ist (wie man auch durch Einsetzen leicht bestätigt) das Partikularintegral

$$F_0 = \frac{1}{(1 + \nu \cdot \cos \varphi)^2}$$

der Gl. (9) für $T = 0$. Das zweite Integral von (9) mit der singulären Stelle ξ_2 kommt deshalb nicht in Betracht, da es, wie die Erste der Gln. (6) lehrt, bei verschwindender Steigung nur eine vom Winkel ϑ unabhängige Lösung V gibt (V wird durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung beschrieben) und diese Lösung mit F_0 übereinstimmt. Aus diesem Grunde ist auch das zu F_0 gehörige zweite Integral der Gl. (21) bedeutungslos. So liegt also nun die Lösungsfunktion

$$V_0 = A_0 \cdot F_0 + (A_1 \cdot F_1 + A_2 \cdot F_2) \cos \vartheta + (B_1 \cdot F_1 + B_2 \cdot F_2) \sin \vartheta \dots \dots (23)$$

mit den noch offenen Konstanten A_0, A_1, A_2, B_1 und B_2 vor. Aus der Ersten der Gln. (20) folgt

$$S_{10} = (A_1 \cdot \Phi_1 + A_2 \cdot \Phi_2) \sin \vartheta - (B_1 \cdot \Phi_1 + B_2 \cdot \Phi_2) \cos \vartheta + h(\varphi) \dots \dots (24)$$

wo

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 2 \cdot F_1 \cdot \sin \varphi - \frac{dF_1}{d\varphi} \cdot \frac{(1 + \nu \cdot \cos \varphi)}{\nu} = - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi)} \\ \Phi_2 &= 2 \cdot F_2 \cdot \sin \varphi - \frac{dF_2}{d\varphi} \cdot \frac{(1 + \nu \cdot \cos \varphi)}{\nu} = \frac{1}{\nu \cdot \cos^2 \varphi \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi)} \end{aligned}$$

gesetzt ist. Die Funktion $h(\varphi)$ ist mit der Konstanten B_0 , wie sich über die Zweite der Gln. (20) ergibt

$$h(\varphi) = \frac{B_0}{\cos^2 \varphi}.$$

Es interessiert der die Spannungen (23) und (24) verursachende Belastungsfall einer Rohrwindung. Allgemein können im Querschnitt $\vartheta = 0$ die beliebigen Kräfte Q_1, Q_2, Q_3 und die beliebigen Momente M_1, M_2 und M_3 angenommen werden. (Bild 8) Die im Querschnitt ϑ herr-

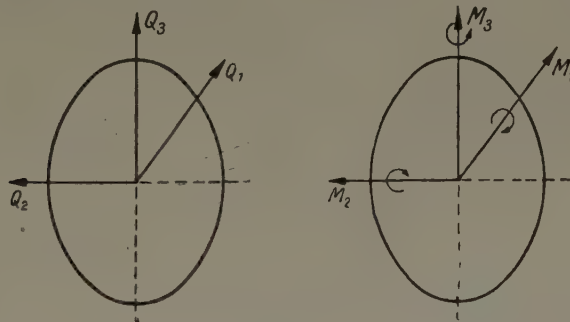


Bild 8

schen inneren Kräfte und Momente müssen dann mit den Belastungsgrößen im Gleichgewicht stehen. Diese sechs Gleichgewichtsbedingungen liefern die unbekannten Integrationskonstanten. Nach Ausführung der längeren Rechnung, wobei Gebrauch gemacht wird von den Relationen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F_0 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi &= 0 & \int_0^{2\pi} F_1 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} F_1 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi &= 0 & \int_0^{2\pi} F_2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} F_2 \cdot d\varphi &= 0 & \int_0^{2\pi} \Phi_1 \cdot d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \Phi_2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi &= 0 & \int_0^{2\pi} \Phi_1 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} &= 0 & \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi} &= 0, \end{aligned}$$

erhält man für die Konstanten: $B_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{-Q_3}{a \cdot \int_0^{2\pi} F_0 \cdot \cos \varphi \, d\varphi} & A_0 &= \frac{Q_3}{a \cdot \nu \cdot \int_0^{2\pi} F_0 \cdot d\varphi} \\ A_1 &= \frac{(M_1 - Q_3 \cdot R)}{a^2 \cdot \int_0^{2\pi} F_1 \cdot d\varphi} & B_1 &= \frac{M_2}{a^2 \cdot \int_0^{2\pi} F_1 \cdot d\varphi} \\ A_1 &= \frac{(M_1 - Q_3 \cdot R)}{a^2 \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_1 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi} & B_1 &= \frac{M_2}{a^2 \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_1 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi} \\ A_2 &= \frac{-Q_2}{a \cdot \int_0^{2\pi} F_2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi} & B_2 &= \frac{Q_1}{a \cdot \int_0^{2\pi} F_2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi} \\ A_2 &= \frac{-Q_2}{a \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_2 \cdot d\varphi} & B_2 &= \frac{Q_1}{a \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_2 \cdot d\varphi} \\ A_2 &= \frac{Q_2}{a \cdot \nu \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi} & B_2 &= \frac{-Q_1}{a \cdot \nu \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots (25).$$

Zusätzlich muß die Bedingungsgleichung

$$M_3 + Q_1 \cdot R = 0$$

erfüllt sein. Wegen Divergenz der Integrale

$$\int_0^{2\pi} \Phi_2 \cdot d\varphi \quad \int_0^{2\pi} \Phi_1 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$$

werden die Integrationskonstanten aus den Gln. (25) nur dann bestimmbar, wenn die Belastungen den Forderungen

$$Q_1 = 0 \quad Q_2 = 0 \quad M_2 = 0 \quad M_1 = Q_3 \cdot R$$

genügen. Damit ist aber auch

$$M_3 = -Q_1 \cdot R = 0.$$

Auf Grund des Bestehens der Relation

$$\int_0^{2\pi} F_0 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = -\nu \cdot \int_0^{2\pi} F_0 \cdot d\varphi = -\frac{2\pi \cdot \nu}{\sqrt{(1-\nu^2)^3}}$$

für die Funktion F_0 wird die Konstante A_0 widerspruchsfrei festgelegt. Mit den Spannungen

$$S_1 = 0 \quad S_2 = 0 \quad V_0 = A_0 \cdot F_0 = \frac{Q_3 \cdot \sqrt{(1-\nu^2)^3}}{2\pi \cdot a \cdot \nu \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi)^2}$$

ist dann der im Torus herrschende Spannungszustand bestimmt. Da zusätzlich zur Kraft Q_3 ein Moment $M_1 = +Q_3 \cdot R$ angreifen muß, entspricht dieser Spannungszustand der Belastung einer ebenen Rohrfederwindung nach Art einer Schraubenfeder; ein Ergebnis, das auch schon die Lösung (12) für verschwindende Windung ($T = 0$) enthält. Es interessiert die Abhängigkeit der extremen Spannungen vom Verhältnis ν . Nennt man die mittlere Schubspannung

$$V_{0m} = \frac{Q_3}{2\pi \cdot a \cdot \nu}$$

so erhält man für die Verhältnisse der maximalen Schubspannung V_{0max} an der Stelle $\varphi = \pi$ und der minimalen Schubspannung V_{0min} an der Stelle $\varphi = 0$ zur mittleren Schubspannung V_{0m} :

$$\frac{V_{0max}}{V_{0m}} = (1 + \nu) \cdot \sqrt{\frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)}} \quad \frac{V_{0min}}{V_{0m}} = (1 - \nu) \cdot \sqrt{\frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)}}$$

Zahlentafel

ν	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
V_{0max}/V_{0m}	1,0000	1,4696	2,1382	3,2000	5,4000	8,2819	∞
V_{0min}/V_{0m}	1,0000	0,6532	0,3928	0,2000	0,0666	0,0229	0,0000

In der Innenseite des Rohres ($\varphi = \pi$) ist mit zunehmendem Verhältnis ν ein starkes Ansteigen der maximalen Schubspannung $V_{0\max}$ (Kerbwirkung) zu erkennen (Bild 9).

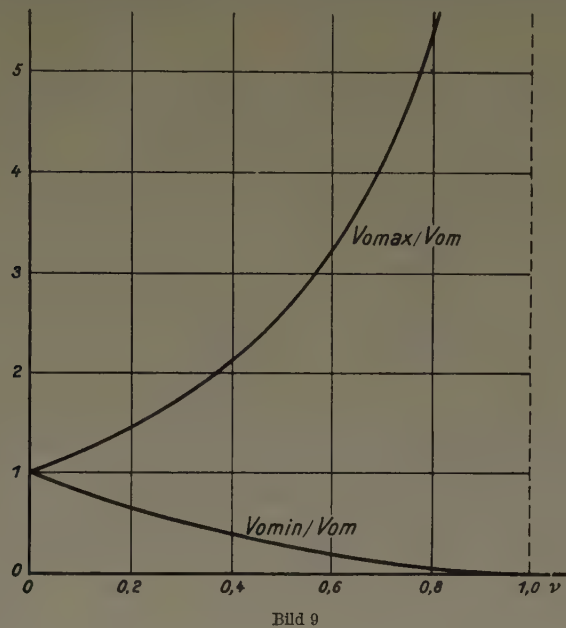


Bild 9

Einer rekursiven Lösung der Systeme (18) und (19) stünde, nachdem die Grundlösungen (23) und (24) bekannt sind, nichts mehr im Wege. Wie bei den Gln. (20) lassen sich die S_{1i} ($i = 1 \dots \infty$) eliminieren, so daß nur noch ein System partieller Differentialgleichungen für die V_i ($i = 1 \dots \infty$) übrig bleibt. Dieses System hat die Form

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial \varphi^2} \cdot (1 + \nu \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \varphi - \frac{\partial V_i}{\partial \varphi} \cdot \sin \varphi \cdot (2 + 5\nu \cdot \cos \varphi) + V_i \cdot \nu \cdot (4 - 6 \cdot \cos^2 \varphi) + \nu \cdot \frac{\partial^2 V_i}{\partial \vartheta^2} = H_i(\varphi) \cdot \sin \vartheta + K_i(\varphi) \cdot \cos \vartheta + L_i(\varphi) \quad (26)$$

wo die $H_i(\varphi)$, $K_i(\varphi)$ und $L_i(\varphi)$ bekannte Funktionen von φ sind. Macht man ähnlich wie oben für die V_i Produktansätze, so zerfällt das System (26) in Systeme gewöhnlicher inhomogener Differentialgleichungen 2. Ordnung, deren homogene Teile aber alle die Form (21) bzw. (22) haben. Daraus ist zu sehen, daß die V_i und damit auch die S_{1i} ebenfalls Pole aufweisen, also unstetige Spannungszustände beschreiben. Auf eine Herleitung im einzelnen wird deshalb kein Wert gelegt.

IV. Zusammenfassung

Für die in einem gewundenen Rohr auftretenden Spannungen werden strenge Ausdrücke hergeleitet. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die Rohrwandung vollkommen biegeschlaff oder auch hinreichend dünn ist, so daß ein Membranspannungszustand vorliegt. Der Spannungszustand der durch Innendruck belasteten Rohrschlange wird durch Formeln beschrieben, welche als brauchbar zu bezeichnen sind. Es ergibt sich ein stetiger, mit einem Maximum in der Innenseite der Windung versehener Spannungsverlauf. Ist die Steigung γ Null, so entsteht ein Sonderfall (durch Innendruck belasteter Torus), dessen Spannungszustand auch durch die von Föppl¹⁾ und Flügge²⁾ aufgestellten Gleichungen für drehsymmetrische Spannungszustände in Rotationschalen beschrieben wird. Die explizite Lösung wurde wohl zum ersten Mal von Föppl¹⁾ angegeben. Die Resultate stimmen mit den in dieser Arbeit erhaltenen Ergebnissen überein. Ein eigentlich merkwürdiger Sachverhalt tritt aber bei der nach Art einer Schraubenfeder belasteten Rohrschlange zutage. Hier liegt ebenfalls ein vom Winkel ϑ unabhängiger Spannungszustand vor, der seinem mathematischen Charakter nach in drei Gruppen zerfällt. Das Wesentliche zeigt der erste Fall $\Delta > 0$. Ist hier die Steigung γ Null (ebene Rohrfederwindung), so erhält man für die Schubspannung (die Schnittkräfte S_1 und S_2 sind Null) wiederum eine stetige Funktion, welche in der Innenseite ($\varphi = \pi$) ihr Maximum aufweist. Schon bei einer beliebig kleinen, jedoch ungleich Null auftretenden Steigung γ ist sofort ein Pol in den Spannungen vorhanden.

Dieser Pol existiert also für $\gamma = 0$ nicht und läuft mit zunehmender Steigung von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis

¹⁾ A. und L. Föppl, Drang und Zwang, zweiter Band, 1928.

²⁾ W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen, 1934.

$\varphi = \pi$, um mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$ bei $\varphi = \pi$ wieder zu verschwinden. Es ist nun aber nicht nur so, daß diese Unstetigkeit vorhanden ist, sondern noch viel mehr; die über einen Querschnitt des Rohres gebildeten Resultierenden konvergieren nicht mehr, d. h. die Rohrschlange wäre überhaupt nicht fähig, die geringste Axialkraft aufzunehmen. Nur bei einer ganz bestimmten Abhängigkeit zwischen der Axialkraft P und dem Axialmoment M_z wäre ein physikalisch sinnvoller Spannungszustand möglich. In Wirklichkeit wird ein solches Verhalten kaum zu erwarten sein. Wahrscheinlich kann auch die Membranrohrschlange durch eine Axialkraft belastet werden, doch ist dann damit zu rechnen, daß große Formänderungen auftreten. Experimentell läßt sich dieser Sachverhalt nicht nachweisen, da die biegeschlaffe Schale ja eine Abstraktion ist, die nicht praktisch realisiert werden kann. Rechnerisch könnte da nur eine Membrantheorie Auskunft geben, in der Deformationen berücksichtigt werden, d. h. die Gleichgewichtsbedingungen müßten am verzerrten Element aufgestellt werden. Die dann bestehenden Gleichungen für die Spannungen und Verschiebungen sind aber nicht mehr linear; eine strenge Lösung dürfte mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden, wenn nicht sogar unmöglich sein. Für die vom Winkel ϑ abhängigen Spannungszustände ist nachgewiesen, daß bei verschwindender Steigung ($\gamma = 0$) nur ein ganz spezieller Belastungsfall (Federbelastung) durch die Membrantheorie beschrieben werden kann. Bei nichtverschwindender Steigung treten in den Spannungen wiederum Pole auf, die eine genauere Untersuchung der Belastungsfälle unwert erscheinen lassen. Es liegt auf der Hand, daß eine biegesteife Rohrwand keine großen Deformationen mehr zuließe; die gewöhnliche Schalentheorie biegesteifer Schalen auch da brauchbare Lösungen liefern würde, wo die hier angewandte Membrantheorie versagt. In der Umgebung der Stellen unendlich großer Spannungen, wie sie die Membrantheorie liefert, kann dann mit einem Auftreten wesentlicher Biegemomente gerechnet werden.

Anmerkung: Der Verfasser behandelt in einer demnächst erscheinenden Arbeit das vorliegende Problem nach der Theorie biegesteifer Schalen.

Eingegangen am 25. April 1956.

Anwendungsmöglichkeiten der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bei der Auswertung von Messungsergebnissen

Von P. Medgyessy in Budapest*)

Von gewissen, z. B. spektroskopischen Meßergebnissen weiß man nur, daß ihre Kurve eine Überlagerung — eine „Mischung“ — von sogenannten stabilen, z. B. Gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen darstellt, deren Parameter — die gesuchten physikalischen Größen — unbekannt sind. — Das Problem der Bestimmung solcher Parameter, die sogenannte „Analyse der Mischung“ wird durch wahrscheinlichkeitstheoretische Mittel exakt gelöst; dann werden Näherungsverfahren — hauptsächlich im Falle einer Mischung von Gaußschen bzw. Cauchy'schen Funktionen — behandelt.

Of certain measurements, e. g., in spectroscopy, it is merely known that they belong to a graph which is a superposition or "mixture" of so-called stable — e. g. normal — frequency function while the values of the parameters of these functions — which are the physical quantities to be found — are unknown. — The problem of the so-called "analysis of mixtures", i. e., the problem of determining the unknown parameter values, is solved exactly by probabilistic methods. Approximation methods are also discussed, mainly for the case of a mixture of normal or Cauchy frequency functions, respectively.

De certains résultats de mesure, p. e. de résultats de mesure spectroscopiques on sait que ses courbes représentent une superposition — un „mélange“ — des soi-disant stable fonctions de densité de probabilité — par exemple des fonctions de Gauß — les paramètres desquelles — c'est à dire les données physiques — sont inconnus. Le problème de la détermination de ces paramètres, c'est à dire la soi-disant „analyse du mélange“, est résolu exactement au moyen de la théorie des probabilités; ensuite des procédés approximatifs sont traités, en particulier dans le cas d'un mélange des fonctions de Gauß respectivement de Cauchy.

O некоторых экспериментальных кривых, например в спектроскопических исследованиях, известно лишь то, что они являются наложением — „смесью“ — устойчивых — например: нормальных — функций плотности распределения вероятностей, в то время как параметры этих функций — некоторые физические константы — неизвестны. Задача определения этих параметров — так называемый „анализ смеси“ — решается точно методами Теории вероятностей. Затем рассматриваются приближённые методы, главным образом в случае наложения функций плотности распределения Гаусса и Коши.

Einleitung

Bei vielen Untersuchungen in der Physik erhält man als Endresultat eine stetige Kurve, woraus dann jene Größen, durch welche die untersuchte Erscheinung charakterisiert wird, prinzipiell bestimmt werden können. Die Untersuchung der Atomspektren bietet ein klassisches

*) Mathematisches Forschungsinstitut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

Beispiel dafür. In der Wirklichkeit ist jede Spektrallinie verwischt; ihre Intensität verläuft nach einer gewissen Funktion, die im allgemeinen als eine Gaußsche oder Cauchysche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (kurz: Gaußsche oder Cauchysche Funktion)¹⁾ betrachtet werden kann, deren Höchstwert bei der wirklichen Stelle der Spektrallinie liegt. Im Falle mehrerer Spektrallinien gehört zu jeder einzelnen eine gesonderte Intensitätsverteilung, die dann überlagert werden. Das Resultat der Überlagerung kann z. B. auf einer photographischen Platte registriert werden. Wenn also die Intensitätsverteilung der einzelnen Linien eine Gaußsche Funktion ist, wird ein gewisser Spektralabschnitt einen solchen Intensitätsverlauf liefern, dessen Diagramm eine Überlagerung jener Gaußschen Funktionen ist, die zu den einzelnen Linien gehören. Es ist klar, daß die einzelnen Komponenten in der Überlagerung mit einem Gewicht auftreten werden, welches von der Intensität der betreffenden Linie abhängt; unsere Untersuchungen beruhen auf der Annahme, daß das Diagramm des erwähnten Intensitätsverlaufs bekannt ist, unabhängig davon, auf welche Art es aufgenommen wurde, (z. B. wurde die Photographie des Spektralabschnittes ausphotometriert). An Hand von Diagrammen sollen wir nun die Stelle und die relative Intensität der einzelnen Spektrallinien bestimmen, d. h., wir sollen die Stellen der Maxima, und die Integrale von $-\infty$ bis ∞ jener Gaußschen Funktionen bestimmen, deren Überlagerung durch das Diagramm dargestellt wird.

Wenn die Maxima der die Komponenten darstellenden Gaußschen Funktionen voneinander genügend entfernt sind, werden sie in der Superposition getrennt erscheinen, wodurch die gesuchten Angaben näherungsweise bestimmbar werden. Meistensfalls werden aber gewisse benachbarte Gaußsche Funktionen voneinander in solchem Maße beeinflußt, daß man z. B. anstatt zweier Maxima nur eins erblickt, usw. Dies bedeutet aber, daß wir, wenn wir nur die aus dem Diagramm hervorragenden „Gipfel“ untersuchen, eine falsche Vorstellung von dem Spektrum erhalten.

Offensichtlich wird prinzipiell nichts geändert, wenn anstatt Gaußscher Funktionen Cauchysche Funktionen auftreten. Übrigens taucht das Hauptproblem (mit verschiedenen Funktionstypen) bei den verschiedensten physikalischen, biologischen, statistischen Untersuchungen auf. ([1], [3], [4], [5]). Es genügt hier auf die elektrophoretische Trennung von Eiweißstoffen hinzuweisen. ([6]).

Das mathematische Problem ist aber in allen diesen Beispielen dasselbe, so daß wir immer auf das spektroskopische Problem als Illustration hinweisen dürfen.

Der mathematische Kern des Problems ist der folgende: Es ist das Diagramm der Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k f_k(x),$$

wo die $f_k(x)$ Funktionen desselben Typs, aber von k abhängig mit verschiedenen Parametern, während die A_k positive Konstanten bedeuten. Die A_k und die in den Funktionen $f_k(x)$ auftretenden Parameter sind unbekannt. Wie kann man mit Kenntnis des Typs der Funktionen $f_k(x)$ die unbekannten Konstanten A_k und die in den $f_k(x)$ vorkommenden Parameter eindeutig bestimmen?

Im erwähnten spektroskopischen Beispiel stellt das Diagramm des Intensitätsverlaufs offensichtlich die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}$$

dar; wir wollen die unbekannten Parameter A_k , m_k , σ_k bestimmen. Die Größen m_k sind die wirklichen Stellen der einzelnen Spektrallinien; wenn die als Komponenten dienenden Gaußsche Funktionen in der obigen normierten Form aufgeschrieben sind, werden die Intensitäten der einzelnen Linien mit A_k^2 proportional sein.

Vom mathematischen Gesichtspunkte aus wurde das Problem zuerst durch G. Doetsch behandelt ([1], [2]). In seinen Arbeiten hat er mehrere Verfahren für die Bestimmung der unbekannten Parameter angegeben, die er „Gauß-Analyse“ genannt hat. Er fand ebenfalls durch

¹⁾ Unter einer Gaußschen, bzw. Cauchyschen Funktion werden im folgenden immer Funktionen vom Typ

$$f(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

bzw.

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + (x-m)^2/\sigma^2}$$

($m, \sigma > 0$ konst.) verstanden.

Anwendung von Fourier-Reihen eine angenäherte Lösung, mit deren Hilfe auch einige Spektral-Aufnahmen erfolgreich ausgewertet wurden. Nach seiner Mitteilung wurde das Verfahren von mehreren Forschern angewendet. In der Literatur fehlen jedoch die weiteren Angaben. Bis auf gewisse Spezialfälle wurden stets graphische Verfahren benutzt, deren Wesen darin besteht, daß man an den Rändern des Diagramms von $f(x)$ praktisch nur eine einzige Gauß-Funktion zu berücksichtigen hat; diese Funktion kann man leicht aufzeichnen, danach graphisch abziehen und das Verfahren wiederholen. Diese Methode verbirgt aber viel Unsicherheit in sich und darf die exakte Lösung nicht ersetzen.

Wir haben bemerkt, daß das Verfahren von G. Doetsch nicht nur im Falle der Gaußschen Funktionen, sondern auch im Falle einer gewissen Familie von Funktionen angewandt werden kann. Auf Grund dieser Tatsache ist es uns gelungen, die Methode von G. Doetsch auf mehrere Funktionstypen auszudehnen. Unsere Untersuchungen stehen in engster Verbindung mit gewissen modernen Ergebnissen bezüglich der aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannten sog. stabilen Dichtefunktionen, bzw. der Analyse gewisser Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

Im folgenden Teil unserer Arbeit werden wir die obenerwähnte allgemeine Idee besprechen und für spezielle Fälle (u. a. auch für Gaußsche Funktionen) ausarbeiten; im Weiteren werden die Fehlerabschätzung des Näherungsverfahrens von G. Doetsch, ferner neuere Näherungsverfahren geschildert. Unsere Auseinandersetzungen werden durch spektroskopische Beispiele illustriert.

1. Ein Satz über die Analyse einer Überlagerung von stabilen Dichtefunktionen

Wir nehmen an, daß das Endresultat irgendeiner Messung ein Diagramm ist, welches eine Funktion $f(x)$ darstellt, von der wir folgendes wissen:

$$a) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k f_k(x) \quad \dots \quad (1.1)$$

(d. h. $f(x)$ ist eine Überlagerung — wahrscheinlichkeitstheoretisch: eine „Mischung“ der Komponenten $f_k(x)$). Der Typ der Funktionen $f_k(x)$ ist bekannt, ihre Parameter und die $A_k > 0$ aber nicht. Die letzteren sollen bestimmt werden; die Bestimmung soll Analyse der Funktion $f(x)$ (d. h. der Überlagerung der Funktionen $f_k(x)$) heißen.

b) Die Funktionen $f_k(x)$ sind die bei den modernen Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung oft vorkommenden sog. stabilen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen; d. h. sie sind dadurch charakterisiert, daß ihre Fourier-Transformierten

$$\mathfrak{F}\{f_k(x)\} = \varphi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) e^{itx} dx$$

die Form

$$\varphi_k(t) = \exp [i \gamma_k t - c_k |t|^{\alpha_k} \{1 + i \beta_k \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha_k)\}] \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.2)$$

haben, wobei $\gamma_k, c_k, \alpha_k, \beta_k$ reelle Parameter sind, $0 < \alpha_k \leq 2$, $|\beta_k| \leq 1$, $c_k > 0$ und

$$\omega(t, \alpha_k) = \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha_k}{2} \quad (\alpha_k \neq 1), \quad \omega(t, 1) = \frac{2}{\pi} \log |t|. \quad ^2)$$

Der Typ von $f_k(x)$ wird durch α_k, β_k völlig bestimmt; infolge des gleichen Typs der Funktionen $f_k(x)$ wird also für jedes k $\alpha_k \equiv \alpha$, $\beta_k \equiv \beta$ sein. — Unter solchen Umständen ist auch $f(x)$ eine Dichtefunktion.

c) Die γ_k, c_k sind unbekannt; wir wissen nur, daß $\gamma_k \neq \gamma_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$) und $0 < c_1 < \dots < c_N$, und daß es keine identische Paare γ_k, c_k gibt. α und β aber, wodurch der Typ der Funktionen $f_k(x)$ charakterisiert wird, sind bekannt.

Es bedeute $\mathfrak{Y}^{-1}(g) = G(x)$ die inverse Fourier-Stieltjes-Transformierte einer Fourier-Transformierten $g(t)$, d. h. es sei

$$G(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(t) \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{2it} - g(-t) \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{2it} \right] dt.$$

²⁾ P. Lévy—A. J. Khintchine, Sur les lois stables. C. R. Ac. Sci. Paris. 202 (1936); siehe auch [7], S. 177.

Nach diesen Vorbereitungen kann folgender Satz ausgesprochen werden:

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton wachsende, reelle Zahlenfolge, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_n \rightarrow c_1$ ($n \rightarrow \infty$), ferner

$$\Psi(t, \lambda_n) = \mathfrak{F}\{f(x)\} \cdot \exp[\lambda_n |t| \{1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)\}] \quad (1.3),$$

$$\Phi(x, \lambda_n) = \mathfrak{Y}^{-1}\{\Psi(t, \lambda_n)\}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x, \lambda_n) = \Phi^*(x).$$

Dann werden die unbekannten Parameter c_1 , γ_1 , A_1 durch die folgenden Eigenschaften von $\Phi^*(x)$ eindeutig bestimmt:

- a) $\Phi^*(\gamma_1 + 0) - \Phi^*(\gamma_1 - 0) = A_1$,
- b) $\Phi^*(x)$ ist an allen anderen Stellen stetig³⁾.

Es sei auf das Wesen des Satzes hingewiesen: Es handelt sich um eine solche Funktion

$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k f_k(x)$, wo man von den Funktionen $f_k(x)$ weiß, daß sie stabile Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit Fourier-Transformierten sind, in welchen gemeinsame α , β und unbekannte γ_k , c_k auftreten. Die Gewichte A_k sind auch unbekannt. Bildet man zuerst die Fourier-Transformierte von $f(x)$, dann — mit verschiedenen Werten λ_n — die Produkte $\Psi(t, \lambda_n)$ und invertiert man diese der Reihe nach, so erhält man eine Funktionenfolge $\Phi(x, \lambda_n)$, die mit $\lambda_n \rightarrow c_1$ gegen eine Funktion $\Phi^*(x)$ konvergiert. Diese hat im Punkte $x = \gamma_1$ (und nur da) einen Sprung A_1 ; daher können die Größen A_1 und γ_1 von der Gestalt des Diagramms von $\Phi^*(x)$ abgelesen werden. c_1 mag durch denjenigen Wert von λ_n , bei welchem der Sprung aufgetreten ist, gegeben werden.

Den einfachen, auf bekannten Sätzen⁴⁾ beruhenden Beweis findet der Leser in einer anderen Arbeit [8] des Verfassers.

Man kann das Verfahren an der neuen Funktion, die nach graphischer Subtraktion des an der Stelle $x = \gamma_1$ erfolgten Sprunges entsteht, wiederholen. Aus dessen Resultat können nun die Parameter c_2 , γ_2 , A_2 bestimmt werden (man merke, daß überall $c_k - c_1$ vorkommt) — usw. von Schritt zu Schritt.

In der Praxis benutzt man öfter die inverse Fourier-Transformierte von $\Psi(t, \lambda_n)$ (d. h.

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, \lambda_n) e^{-itx} dt$) anstatt die inverse Fourier-Stieltjes-Transformierte. Man kann beweisen (auch die Kurve veranschaulicht es plausibel) daß in diesem Falle bei $\lambda_n \rightarrow c_1$ das Resultat der Inversion die „Ableitung“ der obigen Funktion $\Phi^*(x)$ sein wird, — d. h. eine Funktion, die an der Stelle $x = \gamma_1$ Dirac- δ -artig nach unendlich strebt, sonst aber stetig ist. Da kann man A_1 nicht unmittelbar aus der Gestalt der Funktion bestimmen; γ_1 wird aber leichter bestimmt, als durch Untersuchung von $\Phi^*(x)$. Nach einfachem Weglassen des Dirac- δ mag das Verfahren auch hier wiederholt werden; dann erhält man c_2 , γ_2 usw.

2. Die Analyse einer Überlagerung von stabilen Dichtefunktionen in der Praxis

Wir weisen auf die praktische Wichtigkeit des bisherigen hin.

Zu den eine Fourier-Transformierte (1.2) besitzenden stabilen Dichtefunktionen gehören z. B. auch die Gaußschen oder Cauchyschen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Im Falle dieser weiß man aber wohl, wie die Parameter der Dichtefunktion, bzw. ihrer Fourier-Transformierten zusammenhängen. Durch das obige Verfahren können c_1 und γ_1 bestimmt werden; deren Kenntnis ermöglicht aber auch das Berechnen der Parameter der Komponenten $f_1(x)$. Die Diracsche δ -Funktion, die sich am Ende des Verfahrens ergibt, wird einfach aus dem Diagramme weggelassen: dadurch wird schon eine Komponente abgesondert werden. Das Restdiagramm wird von neuem dem Verfahren unterworfen; dabei entartet eine andere Komponente zu einer Diracschen δ , usw. — endlich können alle c_k , γ_k , infolge dessen auch N , die Anzahl der Komponenten bestimmt werden. Dadurch sind (die A_k ausgenommen) die Parameter der Komponenten, d. h. die Komponenten selbst bekannt. Die A_k kann man aber aus dem linearen Gleichungssystem

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^N A_k f_k(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

³⁾ Man kann den Satz leicht verallgemeinern auch für den Fall, wenn $\varphi_k(t)$ von der Form $\exp[i\gamma_k t - c_k \cdot P(t)]$ ist, wo $P(t)$ eine gewisse bekannte, im allgemeinen komplexe Funktion von t und $|t|$ ist. Von dem Standpunkte unseres gegenwärtigen Problems aus hat das aber kein Interesse; daher wird es nicht behandelt.

⁴⁾ Siehe z. B. [7], S. 55—56 bzw. S. 196.

bestimmen, welches durch die an N verschiedenen Stellen aufgenommenen Werte x_1, \dots, x_N gebildet wird.

Wenn der Typ der Funktionen $f_k(x)$ unbekannt ist, dann liefert das Verfahren nur die c_k, γ_k und N . Aus c_k, γ_k kann man hier nicht auf die Parameter der Komponenten schließen; N , die Anzahl der Komponenten wird aber auch in diesem Falle bekannt sein, d. h. dazu genügt schon die Kenntnis des Diagramms und der unter (1.1) angegebenen Eigenschaft von $f(x)$.

Offensichtlich kann unser Verfahren auch in jenem Falle angewandt werden, wo unter den Parametern c_k auch gleiche vorkommen (zwei identische Paare c_k, γ_k gibt es aber nicht!); dann würden gleichzeitig mehrere Komponenten in eine Diracsche δ entarten (an mehreren Stellen springt das Diagramm ins Unendliche). Bei dem folgenden Schritte werden alle diese gleichzeitig abgesondert.

Meistens soll λ_n bei dem ersten Schritte c_1 nicht erreichen und doch erscheinen die Komponenten nach dem Verfahren getrennt.

Bei Gaußschen Funktionen ist das daraus ersichtlich, daß die Streuungen aller Komponenten durch das Verfahren vermindert, d. h. schmaler werden.

Das ganze Verfahren bietet dann das meiste, wenn man nicht nur die Fourier-Transformierten, sondern auch die explizite Form der Dichtefunktion-Komponenten kennt. Solche stabile Dichtefunktionen gibt es nur wenige; die bekanntesten sind die Dichtefunktionen vom Gaußschen, Cauchyschen und vom V-ten Pearsonschen Typ.

In der Praxis kommen nur die beiden ersten vor; deswegen wird das Verfahren im Folgenden auf Grund der bisherigen allgemeinen Überlegungen nur für diese zwei Fälle zusammengefaßt werden.

In diesen beiden Fällen werden auch die praktischen Verfahren ausführlich geschildert werden.

3. Spezialfälle. Die sog. Gaußsche Analyse

Es sei also

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \dots \dots \dots (3.1)$$

die Gleichung des untersuchten Diagramms. Der Einfachheit halber sei auch hier angenommen, daß $m_k \neq m_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$) $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N$ (und es keine zwei identischen Paare m_k, σ_k gibt). Wenden wir unser Verfahren an. Es ist bekannt, daß die Fourier-Transformierte von $f(x)$

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{i m_k t - \frac{\sigma_k^2}{2} t^2} \dots \dots \dots (3.2)$$

ist. Wird dies mit (2.1) verglichen, so sieht man, daß m_k dem γ_k , $\sigma_k^2/2$ dem c_k , 2 dem α und 0 dem β entsprechen. Infolge dessen soll $\varphi(t)$ mit $e^{\lambda_n t^2/2}$ multipliziert werden ($1/2$ wird nur der Einfachheit halber eingebracht). So lange $\lambda_n < \sigma_1^2$ ist, wird

$$\varphi(t) e^{\lambda_n t^2/2} = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{i m_k t - \frac{(\sigma_k^2 - \lambda_n)}{2} t^2} \dots \dots \dots (3.3)$$

sein.

Das ist aber wieder die Fourier-Transformierte einer Superposition von Gaußschen Funktionen. Das Resultat $f^*(x, \lambda_n)$ der inversen Transformation,

$$f^*(x, \lambda_n) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda_n)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda_n}} \dots \dots \dots (3.4)$$

$f^*(x, \lambda_n)$ ist also die Superposition solcher Gaußschen Funktionen, deren Maximum sich an gleicher Stelle, wie im (3.1) befindet, die Streuungsquadrate sind aber durch λ_n vermindert, d. h. die Komponenten zeigen sich stärker getrennt als anfangs. Meistens sieht man schon nach diesem Schritt, wie viele Komponenten vorhanden sind (diejenige, die am stärksten separiert sind, können schon als einzelne Gaußsche Funktionen betrachtet werden; dann sind aber deren unbekannte Parameter leicht zu bestimmen). In der Praxis erscheint die Voraussetzung $\lambda_n \rightarrow c_1$ in der Form, daß das Verfahren mit schrittweise wachsenden λ_n -Werten wiederholt durchgeführt wird. Wenn λ_n nahe an c_1 ist, wird mindestens eine Komponente stark hervortreten. Im allgemeinen genügen schon 2—3 Versuche.

Dieses Verfahren wurde von G. Doetsch „Gauß-Analyse“ genannt. Was in diesem § behandelt wurde, war schon im wesentlichen in seiner Arbeit [1] vorhanden. Dieses Verfahren mag aus klaren Gründen Streuungsverminderung genannt werden. Die im § 1 behandelten Feststellungen stammten aus der Erkenntnis, daß in dieser Methode nur gewisse formale Eigenschaften der Fourier-Transformierten gebraucht werden, infolgedessen kann sie im bedeutenden Maße verallgemeinert werden.

4. Gaußsche Analyse mit Hilfe von Fourier-Reihenentwicklungen (einschließlich Fehlerabschätzungen)

G. Doetsch hat schon darauf hingewiesen, daß man die Streuungsverminderung in der Praxis nicht auf die im § 3. geschilderte Weise durchführen kann, da eine Fourier-Transformierte auf Grund eines Diagramms nicht berechnet werden kann⁵⁾. Er hat aber darauf hingewiesen, daß der Zusammenhang

$$\mathfrak{F}\{f^*\} = e^{\lambda_n t^{1/2}} \mathfrak{F}\{f\} \quad \dots \quad (4.1)$$

der zwischen den (mit \mathfrak{F} bezeichneten) Fourier-Transformierten der Funktionen $f(x)$ bzw. $f^*(x, \lambda_n)$ unter (2.1) bzw. (3.4) besteht, auch mit gewisser Näherung zwischen den Koeffizienten der auf gewissem genügend großem Grundintervalle definierten Fourier-Reihen von f bzw. f^* besteht. In seiner Arbeit [1] teilte er auch Beispiele für die Anwendung dieses Näherungsverfahrens mit.

Fehlerabschätzungen für das angewandte Verfahren publizierte er aber nicht; deshalb werden unsere diesbezüglichen Untersuchungen im Weiteren detailliert werden.

Die Funktion $f(x)$ in (3.1) ist in der Praxis außer einem gewissen Intervall $(0, l)$ gleich Null; infolge seiner Gestalt wird dann auch $f^*(x, \lambda_n)$ gleich 0 außer $(0, l)$ sein. Nun erweitern wir die Funktionen $f(x)$ und $f^*(x, \lambda_n)$ so, daß sie gerade periodische Funktionen von Periodenlänge $(-l, l)$ seien; die so erhaltenen Funktionen entwickeln wir in eine Kosinus-Reihe. Dann werden die Fourier-Koeffizienten

$$Q_\nu = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos(\nu \pi x/l) dx \quad (\nu = 0, 1, \dots) \quad \dots \quad (4.2)$$

bzw.

$$R_\nu = \frac{2}{l} \int_0^l f^*(x, \lambda_n) \cos(\nu \pi x/l) dx \quad (\nu = 0, 1, \dots) \quad \dots \quad (4.3).$$

Infolge des raschen Abnehmens von $f(x)$ und $f^*(x, \lambda_n)$ wird nur ein kleiner Fehler begangen, wenn die Integrale für $(-\infty, \infty)$ genommen sind; dann kommt man aber (von dem Faktor $2/l$ abgesehen) auf die Fourier-Transformierten von $f(x)$ und $f^*(x, \lambda_n)$ an der Stelle $t = \nu \pi/l$.

Entsprechend der Gl. (4.1) hat man nun angenähert

$$R_\nu \approx e^{\lambda_n \nu^2 \pi^2 / l^2} \cdot Q_\nu \equiv S_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots) \quad \dots \quad (4.4)$$

In der Praxis nimmt man also ein passendes Intervall $(0, l)$; dann wird eine gewisse Anzahl M von Fourier-Koeffizienten Q_ν bestimmt, ferner mit den auf Grund von (4.4) gebildeten S_ν der Schnitt der Kosinus-Reihe (einschließlich desselben Index M) hergestellt (d. h. es wird eine Fourier-Synthese vollbracht). Durch deren Resultat wird $f^*(x, \lambda_n)$ angenähert geliefert.

Wegen der Langwierigkeit der Rechnungen teilen wir im folgenden nur das Resultat der Fehlerabschätzung mit⁶⁾. Es sei der mit den S_ν -Werten gebildete Schnitt der Kosinus-Reihe

$$\tilde{\Phi}(x) = S_0/2 + \sum_{\nu=1}^n S_\nu \cos(\nu \pi x/l) \quad \dots \quad (4.5).$$

Es wird eine Abschätzung für $|f^*(x, \lambda_n) - \tilde{\Phi}(x)| = D$ gesucht (die angenäherte Lösung wird nämlich nur in demjenigen Falle zuverlässig, wenn man für alle Stellen weiß, inwiefern dort die Annäherung von der exakten Lösung abweicht). Man erhält folgendes:

$$D \leq \left[\frac{\lambda_n}{2l} + \frac{\lambda_n}{l} \int_0^{M+1} e^{\lambda_n \nu^2 \pi^2 / l^2} d\nu + \frac{4l}{\pi^2 M} \right] \cdot \left[\frac{\max(l - m_k)}{\sigma_1^2} f(l) + \frac{\max m_k}{\sigma_1^2} f(0) \right] + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sum_{k=1}^N A_k}{\sqrt{\sigma_1^2 - \lambda_n}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\pi M \sqrt{\sigma_1^2 - \lambda_n}}{l}\right) \right] \left(\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) \quad \dots \quad (4.6).$$

⁵⁾ In neuerer Zeit gibt es zwar auch elektronische Geräte zu diesem Zweck (siehe z. B. A. B. Macnee, A high speed product integrator, Rev. Sci. Instr. 24 (1953) S. 207). Sie sind aber kostbar und selten; zur Zeit können sie noch nicht für weitere Kreise in Betracht kommen.

⁶⁾ Betreffs der Einzelheiten siehe [9]. — Das steht auch für alle spätere Fehlerabschätzungen.

Das erste Glied von (4.6) fällt aber in der Praxis weg, der nach den gemachten Voraussetzungen $f(l) \approx 0$ und $f(0) \approx 0$ sind. (Übrigens stehen die Dinge so, daß wenn man das Intervall $(0, l)$ seinen Mittelpunkt festhaltend anwachsen läßt, strebt dieses Glied gegen 0.) Das zweite (aus der Vernachlässigung des Restgliedes der Fourier-Reihe stammende) Glied strebt aber im Falle $l \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert; durch das Anwachsen von M kann es aber beliebig vermindert werden, wie es sonst auch zu erwarten war. In ihm treten ganz leicht bestimmbare Größen auf: $\sum_{k=1}^N A_k$ ist ungefähr der Flächeninhalt unter der Kurve von $f(x)$; $\sigma_1^2 - \lambda_n$

kann entweder gegeben werden, oder es kann aus der nach einer mit gewisser λ_n durchgeführten Zerlegung erhaltenen Kurve (aus der am besten separierten Komponente) abgeselen werden. — Wird die Annahme $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N$ weggelassen, so muß man in (4.6) aus erleuchtenden Gründen $\min \sigma_k^2$ anstatt σ_1^2 schreiben, da λ_n kleiner als $\min \sigma_k^2$ bleiben soll, wenn man von einer Streuungsverminderung sprechen will.

Es sei noch folgendes erwähnt: in letzterer Zeit wurde dieses Verfahren in Ungarn erfolgreich durch F. Berencz bei der Untersuchung des Spektrums des Fe-Bogenlichtes angewandt.⁷⁾ Die (verborgenen) Linien die aus der Photographie, welche mit einem Spektrograph von geringerem Auflösungsvermögen aufgenommen wurde, nicht abgelesen werden konnten, wurden durch die Analyse deutlich hervorgebracht: eine Aufnahme, die mit einem Apparat von größerem Auflösungsvermögen verfertigt wurde, hat nachgewiesen, daß die durch die Gaußsche Analyse erhaltenen Linien tatsächlich, eindeutig und an derselben Stelle vorhanden sind. Die Gaußsche Analyse war also imstande, einen Apparat von größerem Auflösungsvermögen ersetzen zu können.

5. Gaußsche Analyse mit Hilfe von anderen Reihenentwicklungen

Der Hauptvorteil des im vorigen § ausführlich behandelten Verfahrens ist die Anwendung des harmonischen Analysators. Auch für die Synthese, wodurch das Endresultat geliefert wird, sind zahlreiche Instrumente im Gebrauch. Ohne solche mathematische Instrumente würde aber das Verfahren lange dauern; ein anderer Nachteil desselben ist die Unabhängigkeit der Fehlerabschätzung von der Stelle, an welcher die Näherung untersucht wird, — infolgedessen wird sie bei kleinen Funktionswerten unbrauchbar.

Es wird also nötig, andere Verfahren zu suchen, die von den vorigen Fehlern frei sind. Im folgenden werden solche Verfahren kurz angegebenen.

Ein neues Näherungsverfahren wird durch den folgenden Satz ermöglicht:

Es seien wieder $f(x)$ und $f^*(x, \lambda_n)$ die unter (4.1) bzw. (4.4) erklärten Funktionen. Dann gilt

$$f^*(x, \lambda_n) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu!} \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^\mu \left[\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} f(x) \right] \dots \dots \dots (5.1).$$

Dieser Formel entsprechend kann die Funktion $f^*(x, \lambda_n)$ die zur Basis der Analyse dient, im Kenntnis der geraden Ableitungen von $f(x)$ mittels verschiedenen λ_n -Werte angenähert bestimmt werden. In der Praxis entstehen hier die größten Schwierigkeiten dadurch, daß die Ableitungen von $f(x)$ aus der zu analysierenden Kurve bestimmt werden müssen; graphisch kann dies nur ungenau durchgeführt werden und ein numerisches Verfahren verlangt die Benutzung von wenigstens 9—11 Koordinaten, wenn man den Fehler herabdrücken will.

Der Satz kann einfach bewiesen werden. Man entwickle $f^*(x, \lambda_n)$ in eine Maclaurinsche Reihe nach λ_n . Durch $f^*(x, \lambda_n)$ wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f^*}{\partial \lambda_n} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^*}{\partial x^2}$$

befriedigt. Mit deren Hilfe erhält man für die Werte $\left[\frac{\partial^\mu f^*}{\partial \lambda_n^\mu} \right]_{\lambda_n=0}$, die in der Reihenentwicklung auftreten, den Ausdruck $\left(-\frac{1}{2}\right)^\mu \frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} f$; formal folgt (5.1) schon daraus. Es ist leicht einzusehen, daß die Entwicklung bei $\lambda_n < c_1$ konvergent ist und $f^*(x, \lambda_n)$ darstellt; damit ist der Beweis beendet.

Nun sei das Näherungsverfahren genauer betrachtet. Wir wollen die Ableitungen numerisch bestimmen. Die benötigten Formeln (samt Fehlerabschätzungen) können in irgendeinem Handbuch über Näherungsmethoden gefunden werden. Es bezeichne $A_{2,\mu}$ den absoluten Fehler, welcher bei einer numerischen Berechnung der 2μ -ten Ableitung begangen wurde und (5.1) sei beim R -ten Glied abgebrochen. Dann erhalten wir $f^*(x, \lambda_n)$ mit einem gewissem Fehler. Der Fehler stammt einerseits aus der Vernachlässigung des Restgliedes der Reihe (der diesbezügliche

⁷⁾ F. Berencz, Bemerkungen zur Analyse der Absorptionskurven, Acta Phys. Ac. Sci. Hung. IV (1955) S. 317—326.

Teil sei mit δ_1 bezeichnet), andererseits aber aus den Fehlern, die bei der numerischen Bestimmung der Ableitungen auftreten (diese letztere Komponente sei δ_2). Offenbar hat man

$$|\delta_2| \leq \sum_{\mu=0}^R \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^\mu \frac{1}{\mu!} \Delta_{2\mu}$$

$|\delta_1|$ wird folgendermaßen von oben abgeschätzt: Im Restgliede von (5.1) werden die in der unendlichen Reihe vorgekommenen Ableitungen (die eigentlich Ableitungen der Gaußschen Funktion sind) durch Hermitesche Polynome ausgedrückt, dann durch bekannte Kunstgriffe abgeschätzt. Nach der Majorisierung des so entstandenen Ausdruckes erhält man die Endformel

$$|\delta_1| < \frac{0,83}{\sqrt{2\pi}(R+1)\min\sigma_k^2} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^N A_k} \left(\frac{\lambda_n}{\min\sigma_k^2} \right)^{R+1} \frac{\sqrt{f(x)}}{(1-\lambda_n/\min\sigma_k^2)} \dots \right) \quad (5.2)$$

auf Grund dessen kann der gesamte Fehler des Verfahrens im gegebenen Falle abgeschätzt werden. (In (5.2) wurde schon der im allgemeinen Falle auftretende $\min\sigma_k^2$ eingeschrieben.)

Dieses Verfahren hat den großen Vorteil, daß es auch ohne spezielle Hilfsmittel durchführbar ist, und daß die Fehlerschranke von der untersuchten Stelle abhängt. Außerdem braucht man den Verlauf von $f(x)$ nur in einer gewissen Umgebung der Stelle x zu kennen, um an derselben Stelle $f^*(x, \lambda_n)$ bestimmen zu können (die übrigen Verfahren benützen den ganzen Verlauf der Funktion).

Die Wertbarkeit des Verfahrens sei an einem fiktiven Beispiele illustriert: Es soll die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-(x-1)^2/2} + e^{-(x+1)^2/2})$$

zerlegt werden. — Für λ_n wurde $3/4$ genommen; die Entwicklung endete bei dem Gliede von der Index $R = 3$. Die Ableitungen wurden aus 7 äquidistanten Punkten berechnet. Die fette Linie (Bild 1) zeigt $f(x)$; sie hat einen einzigen Höchstwert. Die gestrichelte Linie gibt $f^*(x, \lambda_n)$ mit der erwähnten Annäherung. Zum Vergleich wurde die Kurve des genauen Resultates

$$f^*(x, 3/4) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (e^{-2(x-1)^2} + e^{-2(x+1)^2})$$

ingezeichnet (punktirierte Linie). Größere Abweichungen zeigen sich nur an den Stellen der Extrema; die Stellen der Maxima können schon bei dieser Annäherung recht gut bestimmt werden. Gemäß der Tatsache, daß in diesem Falle der Fehlerschranke von der Größenordnung von $f(x)$ ist, darf man das Resultat als ausreichendes betrachten. Bei $\lambda_n = 1/2$ wäre die Größenordnung der Fehlerschranke nur $0,1 f(x)$.

— Sehr kurz sei noch ein anderes Verfahren erwähnt. Bei ihm werden $f(x)$ sowie auch $f^*(x, \lambda_n)$ in Gram-Charliersche Reihen entwickelt. Man kann beweisen, daß bei $0 < \sigma_k^2 < 1$ (das ist aber nur eine Frage des Maßstabes) die Zusammenhang

$$c_\mu^* = \sum_{\varrho=0}^{[\mu/2]} \frac{(-1)^\varrho \mu! \lambda_n^\varrho}{2^\varrho \varrho! (\mu-2\varrho)!} c_{\mu-2\varrho} \quad (\mu = 0, 1, \dots) \quad (6.1)$$

zwischen den Koeffizienten der Entwicklung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{c_\mu^*}{\mu!} e^{-x^2/2} H_\mu(x) \quad (6.2)$$

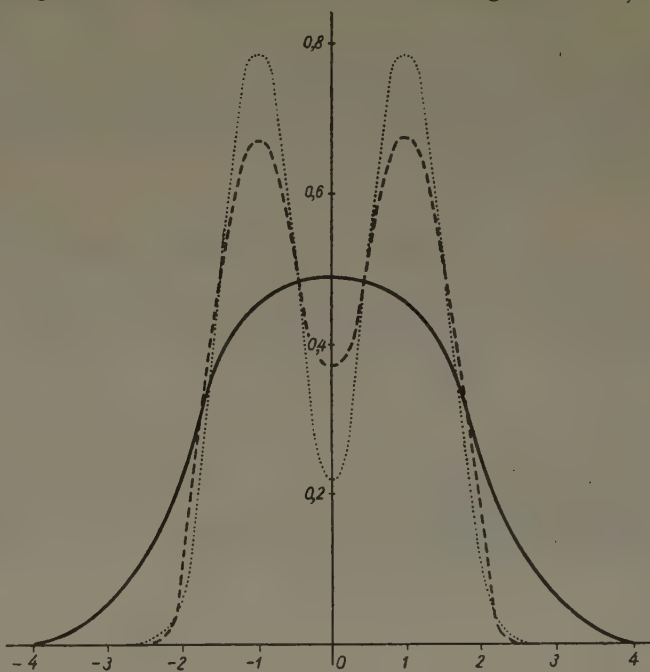


Bild 1

bzw.

$$f^*(x, \lambda_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{c_{\mu}^*}{\mu!} e^{-x^2/2} H_{\mu}(x) \quad \dots \quad (6.3)$$

besteht (die H_{μ} bedeuten Hermitesche Polynome), und die Reihen konvergieren gleichmäßig. In diesem Falle wird das praktische Verfahren das folgende: die zu „analysierende“ Funktion $f(x)$ wird in eine Gram-Charliersche Reihe entwickelt; mit Hilfe der Koeffizienten der Reihenentwicklung werden die c_{μ}^* nach (6.1) berechnet. Mit diesen c_{μ}^* -Werten wird nun ein gewisser Abschnitt von (6.3) gebildet („Hermitesche Synthese“). Für das ganze Verfahren empfiehlt sich sehr die Anwendung von mathematischen Instrumenten.

Auch hier kann der Fehler R_s , der dadurch begangen wird, daß man beim S -ten Gliede die Reihenentwicklungen (6.2) und (6.3) abbricht, ziemlich leicht abgeschätzt werden. Hier sei nur die Schranke für R_s mitgeteilt:

$$|R_s| < \frac{1,18}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/4} \left(\sum_{k=1}^N A_k \right) e^{\frac{\max m_k^2}{4(1 - \max \sigma_k^2 + \lambda_n)}} \frac{[1 - \min \sigma_k^2 + \lambda_n]^{S+1}}{(1 - \sqrt{1 - \min \sigma_k^2 + \lambda_n})}.$$

(Die Formel wurde im wesentlichen mit den in § 5 erwähnten Mitteln abgeleitet.)

Die Fehlerschranke der bisher erwähnten Verfahren strebt bei $\lambda_n \rightarrow \min \sigma_k^2$ gegen ∞ . Glücklicherweise genügt in der Praxis meistens schon jener Grad der Annäherung, bei welchem die Fehlerschranken noch brauchbar sind. Das wurde auch durch den in § 4. mitgeteilten spektroskopischen Beispiel bewiesen.

6. Die Analyse einer Überlagerung von Cauchyschen Funktionen

Im Sinne unseres in § 2 mitgeteilten Programms wird nun unser allgemeines Verfahren auf die Superposition anderer stabilen Dichtefunktionstypen: der Cauchyschen Dichtefunktionen angewandt werden. Wir behandeln also die Aufgabe, in einer Mischung

$$g(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{\pi \sigma_k} \frac{1}{1 + (x - m_k)^2 / \sigma_k^2} \quad \dots \quad (7.1)$$

die unbekannten Parameter A_k , m_k , σ_k zu bestimmen. Der einfacheren Behandlung wegen sei es angenommen, daß $m_k \neq m_l$ ($k, l = 1, \dots, N$; $k \neq l$), $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N$ und daß es identische Paare m_k , σ_k nicht gibt (diese Beschränkungen sind aber nicht wichtig).

Die Fourier-Transformierte von $g(x)$ ist von der Form

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{i m_k t - \sigma_k |t|} \quad \dots \quad (7.2),$$

das entspricht folgender Wahl der Parameter in (1.2): $\gamma_k = m_k$, $c_k = \sigma_k$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$.) Hier ist der Zusammenhang zwischen den Parametern der Fourier-Transformierten und der originalen Funktion der einfachst mögliche. Das praktische Verfahren, welches ein Analogon der bei den Gaußschen Funktionen angewandten Streuungsverminderung ist, lautet folgendermaßen: Auf Grund von $g(x)$ bilde man $\psi(t)$; sie sei dann mit $e^{\lambda_n |t|}$ multipliziert, wobei $\lambda_n < \sigma_1$ ein von uns gewählter Parameter ist. Bildet man die inverse Transformation dieses Produktes, so erhält man eine Funktion $g^*(x, \lambda_n)$, die von (7.1) nur in dem abweicht, daß $\sigma_k - \lambda_n$ anstatt σ_k in ihr auftritt. Auch hier bedeutet diese Tatsache, daß die Komponenten in der Kurve der nach dem Verfahren erhaltenen Funktion $g^*(x, \lambda_n)$ separiert erscheinen, infolgedessen auch — mit guter Annäherung — ihre Parameter bestimmt werden können.

Selbstverständlich kann man das Verfahren auch hier nicht so einfach durchführen. Auch hier muß man Näherungsverfahren suchen.

Offenbar kann jedes auf die Fourier-Analyse und Synthese beruhendes Näherungsverfahren, welches in § 4 in Zusammenhang mit der Zerlegung einer Mischung von Gaußschen Funktionen auseinandergesetzt wurde, auch hier angewandt werden. Eine (wiederholte) Behandlung des Prinzips und der Durchführung ist überflüssig. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, daß die Cauchysche Funktion wesentlich langsamer als die Gaußsche nach Null strebt; so soll man hier die Fourier-Entwicklung auf einem bedeutend größeren Intervall $(-l, l)$ als beim letzteren durchführen. Auch die Fehlerabschätzung ist hier verwickelter, da man die Ableitungen der Cauchyschen Funktion schon nicht mit wohlbekannten orthogonalen Polynomen in Verbindung bringen kann (bei den Ableitungen der Gaußschen Funktion ist das bekanntlich durch die Hermiteschen Polynome möglich.)

Infolgedessen sei hier eine andere Methode angegeben, welche derjenigen in § 5 ähnlich ist. Bei der Zerlegung von (7.1) ist das Resultat des allgemeinen Verfahrens die Mischung

$$g^*(x, \lambda_n) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{\pi (\sigma_k - \lambda_n)} \frac{1}{1 + (x - m_k)^2 / (\sigma_k - \lambda_n)^2} \dots \dots \dots (7.3).$$

Wie in § 5 so auch hier versucht man eine Herstellung von $g^*(x, \lambda_n)$ durch die Ableitungen von $g^*(x, 0) = g(x)$.

Es ist leicht nachzuweisen, daß die Funktion $g^*(x, \lambda_n)$ die Laplacesche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 g^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g^*}{\partial \lambda_n^2} = 0 \dots \dots \dots (7.4)$$

($-\infty < x < \infty$, $0 < \lambda_n < \min \sigma_k$) erfüllt. Wird nun $g^*(x, \lambda_n)$ nach λ_n in eine Taylorsche Reihe

$$g^*(x, \lambda_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^{\nu}}{\nu!} \left[\frac{\partial^{\nu} g^*}{\partial \lambda_n^{\nu}} \right]_{\lambda_n=0} \dots \dots \dots (7.5)$$

entwickelt, so können die Ableitungen von geradem Index durch die Ableitungen nach x von g^* an der Stelle $\lambda_n = 0$ (d. h. durch die Ableitungen nach x von $g(x)$ in (7.1)) ausgedrückt werden. Bei denjenigen von ungeradem Index geht das aber nicht. Infolgedessen muß man den folgenden Umweg einschlagen:

Man betrachte die Funktion

$$\frac{1}{2} [g^*(x, \lambda_n) + g^*(x, -\lambda_n)] \equiv G^*(x, \lambda_n).$$

Diese Funktion ist die Summe zweier Mischungen vom Typ (7.3); die Komponenten des ersten sind voneinander stärker getrennt, als diejenigen von (7.1); die Komponenten des zweiten verwechseln sich aber noch stärker. So entspricht also der einzelnen Komponenten in $G^*(x, \lambda_n)$ eine Kurve, die die Summe einer verengten und einer verflachten Cauchyschen Kurve ist. Der Fuß der einzelnen Komponenten ist verzerrt, ihr Maximum ist aber eine scharf herausragende Cauchysche Funktionskurve; infolgedessen kann man daraus wenigstens auf die Anzahl der Komponenten und die Parameter m_k — wenn auch an die übrigen Parameter schon nicht — schließen. Das genügt aber schon für spektroskopische Zwecke völlig.

Das Problem der Zerlegung soll also als gelöst betrachtet werden, wenn man die Funktion $G^*(x, \lambda_n)$ kennt. Sie kann aber leicht ausgerechnet werden, da man die partiellen Ableitungen geraden Index in der Entwicklung

$$G^*(x, \lambda_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^{2\nu}}{(2\nu)!} \left[\frac{\partial^{2\nu}}{\partial \lambda_n^{2\nu}} g^*(x, \lambda_n) \right]_{\lambda_n=0} \dots \dots \dots (7.6)$$

mit Hilfe von (7.4) schon ausdrücken kann. In Folge des Typs von $g^*(x, \lambda_n)$ hat man offenbar

$$\left[\frac{\partial^{2\nu}}{\partial \lambda_n^{2\nu}} g^*(x, \lambda_n) \right]_{\lambda_n=0} = (-1)^{\nu} \frac{\partial^{2\nu}}{\partial x^{2\nu}} g^*(x, 0) = (-1)^{\nu} \frac{d^{2\nu} g}{dx^{2\nu}},$$

hieraus

$$G^*(x, \lambda_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\lambda_n^{2\nu}}{(2\nu)!} \left[\frac{d^{2\nu}}{dx^{2\nu}} g(x) \right] \dots \dots \dots (7.7).$$

$G^*(x, \lambda_n)$ kann also angenähert durch einen Schnitt dieser Funktionenreihe hergestellt werden, wenn die $g^{(2\nu)}(x)$ schon numerisch bestimmt sind. Das letztere mag ebenso, wie es in § 5 geschildert wurde, geschehen.

Der Fehler, welcher aus der angenäherten Bestimmung der Ableitungen herrührt, wurde schon in § 5 geschildert; hier sei nur eine Abschätzung⁸⁾ für den Fehler δ_1 mitgeteilt, welcher begangen wird, wenn von (7.7) nur R Glieder genommen wurden;

$$|\delta_1| < \left(\frac{\lambda_n}{\min \sigma_k} \right)^R \left(\frac{\lambda_n^2}{\min \sigma_k^2 - \lambda_n^2} \right) g(x).$$

Die Schranke hängt auch hier von dem Wert der zu analysierenden Funktion ab; im Falle $\lambda_n \rightarrow \min \lambda_k$ wird sie natürlich immer mehr unbrauchbar, das kann aber durch das Anwachsen von R kompensiert werden.

⁸⁾ Betreffs der Einzelheiten siehe [10].

Um die Nützlichkeit des Verfahrens zu illustrieren, sei hier die Zerlegung der fiktiven Mischung

$$g(x) = \frac{1}{1 + (x - 0,5)^2} + \frac{1}{1 + (x + 0,5)^2}$$

durchgeführt (Bild 2). Die Kurve von $g(x)$ ist durch die dicke, die mit $\lambda_n = 3/4$ gebildete Näherungskurve von $G^*(x, \lambda_n)$ aber durch die dünne Linie gezeichnet (der Schnitt der Reihe

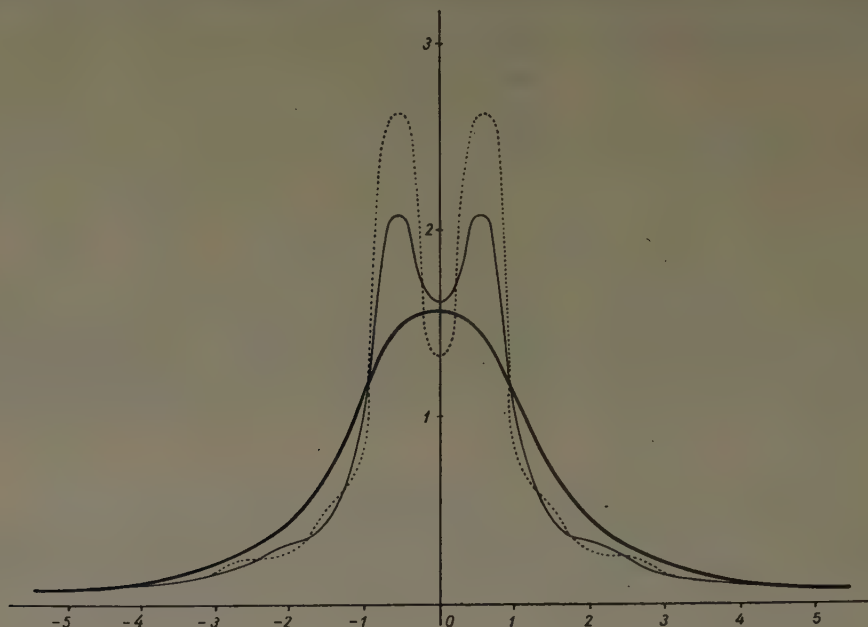


Bild 2

schließt sich bei der Index $r = 5$). Die Kurve des exakten Resultats (welches hier ausgerechnet werden kann) wird durch die punktierte Linie gedeutet. Die Ableitungen wurden numerisch aus 11 äquidistanten Punkten berechnet. Die Näherungslösung zeigt die Komponenten unzweideutig.

Es sei noch Folgendes bemerkt: (7.1) ist eigentlich die Partialbruch-Darstellung von $g(x)$. Wenn man also $g(x)$ in der Gestalt einer rationalen gebrochenen Funktion darstellen kann (es gibt Methoden dafür⁹⁾), so kann man mit deren Hilfe die Parameter an der rechten Seite von (7.1) durch Benutzung einfacher algebraischen Sätze bestimmen. Diese Methode ist viel elementarer, als die übrigen; sie hat aber den Nachteil, daß eine empirische Funktion $g(x)$ schwer in der gewünschten Form einer rationalen gebrochenen Funktion ausgedrückt werden kann. Auf Einzelheiten kann man hier nicht eingehen.

Einer Mischung von Cauchyschen Funktionen begegnet man in spektroskopischen und atomphysikalischen Problemen¹⁰⁾. Wenn das Intensitätsdiagramm der Spektren durch Cauchysche Funktionen besser als durch diejenigen von Gauß angenähert werden kann, so können die in diesem § mitgeteilten Verfahren eine wichtige Rolle spielen.

7. Weitere Möglichkeiten der Analyse einer Überlagerung von stabilen Dichtefunktionen

Zum Schluß sei noch folgende Bemerkung gemacht, die weitere Perspektiven eröffnet:

Die sog. „ λ -Transformierte“ $f^*(x, \lambda_n)$ in (5.1) welche zur Basis der Gauß-Analyse, ferner die Funktion $g^*(x, \lambda_n)$ in (7.3) welche zur Basis der Zerlegung einer Mischung von Cauchyschen Funktionen diene — beide befriedigen eine spezielle partielle Differentialgleichung. Es liegt nahe zu untersuchen, ob auch eine Mischung von stabilen Dichtefunktionen im allgemeinen irgendeine partielle Differentialgleichung befriedigen will?

Hier können wir auf die Einzelheiten unserer Untersuchungen nicht eingehen, es sei nur das Endresultat mitgeteilt.

In der Mischung

$$h(x) = \sum_{k=1}^N A_k h_k(x)$$

seien die $h_k(x)$ solche stabile Dichtefunktionen, daß in der charakteristischen Funktion

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^N A_k \exp [i \gamma_k t - c_k |t|^\alpha \{1 + i \beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)\}]$$

⁹⁾ Siehe z. B. V. B. V. B. Solodovnikov, Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. Москва, 1952. S. 219.

¹⁰⁾ Siehe z. B. W. Heisenberg, Theorie des Atomkerns, Göttingen, 1951.

von $h(x)$ entweder $\alpha = p/q$ ($\neq 1$) (rational) ($p, q = 1$, $0 < \alpha \leq 2$ und $0 \leq |\beta| \leq 1$ oder $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ sind. In diesem Falle befriedigt die zur Basis der Zerlegung dienende (nach (1.3) gebildete) Funktion

$$h^*(x, \lambda_n) = \mathfrak{F}^{-1} \{ \varphi(t) \cdot \exp [\lambda_n |t|^2 \{ 1 + i \beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha) \}] \}$$

— als eine Funktion von x und λ_n — eine lineare partielle Differentialgleichung vom Typ

$$K_1 \frac{\partial^a h^*}{\partial x^a} + K_2 \frac{\partial^{b+c} h^*}{\partial \lambda_n^c \partial x^b} + \frac{\partial^d h^*}{\partial \lambda_n^d} = 0,$$

wobei a, b, c, d im allgemeinen > 1 und K_1, K_2 Konstanten sind. In mehreren Spezialfällen (z. B. bei $\beta = 0$) wird noch $K_2 = 0$ sein.

Die am Beginn des § erwähnten Differentialgleichungen sind nun Spezialfälle dieser allgemeinen partiellen Differentialgleichung. Diese Tatsache wurde auch in anderen Richtungen verwertet: 1. In gewissen Fällen liegt es nahe, $h^*(x, \lambda_n)$ in solcher Art darzustellen, daß man die erwähnte partielle Differentialgleichung numerisch näherungsweise integriert; als Anfangsbedingung kann man nehmen, daß $h^*(x, 0)$ nichts anderes als die zu analysierende (durch sein Diagramm gegebene) Mischung ist; 2. Auf diejenige Differentialgleichung stützend können ähnliche Verfahren wie im § 7 auch für die Zerlegung einer Mischung von komplizierten stabilen Dichtefunktionen ausgearbeitet werden.

Bei den Gaußschen Funktionen wurden auch diesbezüglich Untersuchungen angestellt. Sie gaben auch bei grober Annäherung qualitativ gute Resultate. Wenn man sich nicht auf ein paar spezielle stabile Dichtefunktionen beschränkt, so werden diese letzteren Methoden die einzelne, welche im allgemeinen zur Hilfe gezogen werden können; infolgedessen wird es nötig, sie viel gründlicher zu behandeln. All dieses überschritt aber schon das Ziel unserer Arbeit.

Es sei nur oberflächlich darauf hingewiesen, daß das Endresultat gewisser Experimente einer Mischung von diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen äquivalent ist; die Mischung von binomialen, bzw. Poisson-schen Verteilungen kann man auch in Komponenten zerlegen. Da in unserer Arbeit nur der Fall von stetigen Verteilungen untersucht wurde, gehören die Einzelheiten nicht zur Sache. Sie sind in einer unserer Arbeiten ([11]) zu finden.

Literatur

- [1] G. Doetsch, Die Elimination des Dopplereffekts bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten. Zs. Phys. **49** (1928), S. 705—730.
- [2] G. Doetsch, Zerlegung einer Funktion in Gaußsche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. Math. Zs. **41** (1936), S. 283—318.
- [3] A. Kiss-C. Sándorffy, Sur les méthodes d'analyse des courbes d'absorption. Acta Chem. et Phys. Szeged **II** (1948), S. 71—76.
- [4] F. Wuhrmann-Ch. Wunderly, Die Bluteiweißkörper des Menschen. Basel 1947.
- [5] K. Pearson, Contributions to the mathematical theory of evolution. Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **185** (1894), S. 71—110.
- [6] E. Wiedemann, Über die Auswertung von Elektrophorese-Diagrammen nach L. G. Longworth und Philpot-Svensson. Helv. Chim. Acta **XXX**, Pars I (1947), S. 892—900.
- [7] Б. В. Гнеденко — А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Москва 1949.
- [8] P. Medgyessy, Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban. (Neuere Resultate bezüglich der Zerlegung einer Mischung von Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen in Komponenten.) MTA Akalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, Budapest **III** (1954), S. 155—169. (Mit fremdsprachiger Zusammenfassung.)
- [9] P. Medgyessy, Kiegészítés az „Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban“ című dolgozathoz. (Ergänzungen zur Arbeit „Neuere Resultate bezüglich der Zerlegung einer Mischung von Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen in Komponenten.“) MTA Akalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, Budapest, **III** (1954), S. 331—341. (Mit fremdsprachiger Zusammenfassung.)
- [10] P. Medgyessy, Közelítő eljárás Cauchy-sűrűségfüggvények keverékének összetevőkre bontására. (Näherungsverfahren für die Zerlegung einer Mischung von Cauchyschen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen in Komponenten.) MTA Akalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, Budapest **III** (1954), S. 321—329. (Mit fremdsprachiger Zusammenfassung.)
- [11] P. Medgyessy, Diszkrét valószínűség-eloszlások keverékének felbontása összetevőire. (Zerlegung einer Mischung von diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Komponenten.) MTA Akalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, Budapest **III** (1954), S. 139—153. (Mit fremdsprachiger Zusammenfassung.)

Ein Verfahren zur Bildung von Matrizanten

Von O. Hellman in Helsinki

Eine Gruppe von erstgradigen Differentialgleichungen, die man in Matrizenform geschrieben hat, löst man bekanntlich an Hand des sog. Matrizanten auf. Man teilt die Koeffizientenmatrix A des betreffenden Differentialgleichungssystems in Untermatrizen so, daß die Untermatrizen, die auf der Diagonale liegen, quadratisch werden. Mit Hilfe der Störungsrechnung bildet man jetzt den Matrizanten für A . In der hergeleiteten Form sind die Matrizanten der oben erwähnten diagonalen Untermatrizen die Hauptbauteile, die die übrigen zwei Untermatrizen miteinander „koppeln“. Als Anwendung wird das Problem der gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen betrachtet.

A system of differential equations of the first order written in matrix form, may be solved in the well-known way by means of the so-called matrizant: The matrix A of the coefficients of the given system of differential equations is partitioned into submatrices in such a way that the submatrices on the diagonal are square matrices; the matrizant for A is found by using perturbation theory. In the form derived here the matrizants of the above-mentioned submatrices on the diagonal are the main elements which are coupled by the remaining two submatrices. The theory is applied to the problem of coupled flexural and torsional oscillations.

Il est connu qu'un groupe d'équations différentielles du premier degré écrit sous forme de matrices est résolu au moyen de soi-disant matricants. On divise la matrice du coefficient A du système d'équations différentielles en question en matricants subordonnés de manière que les matricants subordonnés se trouvant sur la diagonale deviennent quadratiques. Au moyen de la calcul des erreurs on forme maintenant le matricant pour le coefficient A . Dans la forme dérivée les matricants des matricants subordonnés et diagonaux mentionnés ci-dessus sont les membres principaux „liant“ les deux autres matricants subordonnés. Comme exemple pour l'application le problème des oscillations de flexion et des oscillations de torsion liées est traité.

Систему дифференциальных уравнений первого порядка, записанную в матричной форме, можно решить, как известно, при помощи матрицанта. Можно разделить матрицу A коэффициентов рассматриваемой системы на клетки таким образом, чтобы на диагонали A находились квадратные матрицы. Затем методом малого параметра строится матрицант A . В предлагаемой форме решения матрицанты упомянутых выше диагональных матриц служат главными частями, „связывающими“ остальные две клетки. В качестве примера рассматриваются связанные крутильные и поперечные колебания.

Es sei A eine $n \times n$ -Matrix, deren Elemente a_{ij} stetige Funktionen von t im Intervall $0 \cdots h$ sind und für welche die Ungleichung

$$A \leq M \{n, n\} \quad (1)$$

gilt, wo M eine endliche reelle Zahl ist ¹⁾. Ferner ist \mathfrak{z} ein n -Vektor.

Die Lösung der Differentialgleichung,

$$\mathfrak{z}' = A \mathfrak{z} \quad (2)$$

für welche $\mathfrak{z}(0) = \eta_0$, lautet jetzt [1]

$$\mathfrak{z} = \Omega_0^t(A) \eta_0 \quad (3),$$

wo

$$\Omega_0^t(A) = I + \int_0^t A d\tau_0 + \int_0^t A d\tau_1 \int_0^{\tau_1} A d\tau_0 + \cdots \quad (4)$$

der sog. Matrizant ist. Es läßt sich zeigen [1], daß

$$\mathfrak{z} \leq e^{Mt} \|\eta_0\| \{n, 1\} \quad (5)$$

gilt, wenn

$$\|\eta_0\| = \sum_{v=1}^n |\eta_{0v}| \quad (6).$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß es nur eine einzige Lösung (3) der Differentialgleichung (2) mit der Anfangsbedingung $\mathfrak{z}(0) = \eta_0$ gibt.

Die Matrix A wird jetzt in folgender Weise in Untermatrizen geteilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1k} & a_{1k+1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ & & & & & \\ a_{k1} & & & a_{kk} & a_{kk+1} & a_{kn} \\ a_{k+11} & & & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & a_{k+1n} \\ & & & & & \\ a_{n1} & & & a_{nk} & a_{nk+1} & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \psi \\ \xi & b \end{pmatrix} \quad (7).$$

a und b sind quadratische Matrizen, ξ und ψ können aber auch verschiedene Spalten- und Zeilenanzahl haben.

Satz 1: Setzt man $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} a & \varepsilon \psi \\ \varepsilon \xi & b \end{pmatrix}$, wo ε eine endliche, positive und reelle Zahl ist, so ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \Omega_0^t(A_\varepsilon) = \Omega_0^t(A) \quad (8).$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\mathfrak{z}' = A \mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z}'_\varepsilon = A_\varepsilon \mathfrak{z}_\varepsilon$$

unter denselben endlichen, von Null verschiedenen, Anfangswert $\mathfrak{z}(0) = \mathfrak{z}_\varepsilon(0) = \eta_0$ (der nicht näher festgelegt zu werden braucht) lauten

$$\mathfrak{z} = \Omega_0^t(A) \eta_0$$

$$\mathfrak{z}_\varepsilon = \Omega_0^t(A_\varepsilon) \eta_0$$

¹⁾ Hier und im folgenden bezeichnen wir mit $\{m, n\}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, deren Elemente alle gleich 1 sind. Für zwei Matrizen A und B mit den Elementen a_{ij} bzw. b_{kl} gilt die Ungleichung $A < B$, wenn $a_{rs} < b_{rs}$ für jedes r und s gilt.

wobei offenbar

$$\mathfrak{z}_\varepsilon \leq \begin{cases} e^{\varepsilon M t} \|\eta_0\| \{n, 1\} & \varepsilon > 1 \\ e^{M t} \|\eta_0\| \{n, 1\} & \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

Man sieht ein, daß \mathfrak{z}_ε bei $\varepsilon = 1$ begrenzt ist.

Nun ist

$$(\mathfrak{z}'_\varepsilon - \mathfrak{z}') - A(\mathfrak{z}_\varepsilon - \mathfrak{z}) = (A_\varepsilon - A)\mathfrak{z}_\varepsilon$$

woraus sich ergibt [1]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_\varepsilon - \mathfrak{z} &= \Omega'_0(A) \left\{ (\varepsilon - 1) \int_0^t (\Omega'_0(A))^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{z}_\varepsilon d\tau + \mathfrak{z}_\varepsilon(0) - \mathfrak{z}(0) \right\} \\ &= (\varepsilon - 1) \Omega'_0(A) \int_0^t (\Omega'_0(A))^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{z}_\varepsilon d\tau. \end{aligned}$$

Rechts sind $\Omega'_0(A)$, $(\Omega'_0(A))^{-1}$, ξ , ψ und \mathfrak{z}_ε für $0 \leq t \leq h$ und für endliches ε begrenzt. Also ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (\mathfrak{z}_\varepsilon - \mathfrak{z}) = 0$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz 2: $\Omega'_0(A_\varepsilon)$ läßt sich für alle reellen Werte von ε in eine absolut konvergente ε -Potenzreihe entwickeln:

$$\Omega'_0 = \Omega'^0_0 + \varepsilon \Omega'^1_0 + \varepsilon^2 \Omega'^2_0 + \cdots \quad (9).$$

Hier enthält keine der Matrizen Ω'^k_0 die Größe ε . Die ε -Potenzreihe (9) ist stetig und eindeutig in bezug auf ε .

Ist $a_{\varepsilon ij}$ ein Element von A_ε , so bezeichnet man mit $|A_\varepsilon|$ die Matrix mit den Elementen $|a_{\varepsilon ij}|$. Der Matrizant ist auch für $|A_\varepsilon|$ definiert. Für ihn gilt die Ungleichung

$$\Omega'_0(|A_\varepsilon|) \leq \begin{cases} e^{\varepsilon M t} \{n, n\} & \varepsilon > 1 \\ e^{M t} \{n, n\} & \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

Dies bedeutet aber, daß die unendlichen Elementenreihen von $\Omega'_0(A_\varepsilon)$ auch absolut konvergieren. Weil der Wert der Summe einer absolut konvergenten unendlichen Reihe von der Reihenfolge der Summation unabhängig ist, ist es gestattet, die Reihen in den Elementen von $\Omega'_0(A_\varepsilon)$ in Potenzreihen von ε zu ordnen. Daß (9) eine stetige und eindeutige Funktion von ε ist, folgt aus den bekannten Eigenschaften der Potenzreihen.

Satz 3: Es ist

$$\Omega'_0 = \Omega'^0_0 + \Omega'^1_0 + \Omega'^2_0 + \cdots \quad (10).$$

Nach dem Satz 2 konvergiert die Reihe (9) gegen einen endlichen Wert bei $\varepsilon = 1$. Daß dieser Wert gleich $\Omega'_0(A)$ ist, ergibt sich aus dem Satz 1.

(10) ist eine Entwicklung des Matrizanten $\Omega'_0(A)$. Zunächst handelt es sich um die Bestimmung der Matrizen Ω'^k_0 . Natürlich geht das, wenigstens im Prinzip, an Hand der Definitionsgleichung (4). Im folgenden verwendet man aber ein anderes Verfahren.

Man schreibt die Differentialgleichung $\mathfrak{z}'_\varepsilon - A \mathfrak{z}_\varepsilon = 0$ in die Form

$$\mathfrak{z}'_\varepsilon - (A_0 + \varepsilon A_1) \mathfrak{z}_\varepsilon = 0 \quad \begin{cases} A_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (11).$$

Ferner setzt man

$$\mathfrak{z}_\varepsilon = \mathfrak{z}_0 + \varepsilon \mathfrak{z}_1 + \varepsilon^2 \mathfrak{z}_2 + \cdots \quad (12).$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathfrak{z}'_0 - A_0 \mathfrak{z}_0) + \varepsilon (\mathfrak{z}'_1 - A_0 \mathfrak{z}_1 - A_1 \mathfrak{z}_0) + \varepsilon^2 (\mathfrak{z}'_2 - A_0 \mathfrak{z}_2 - A_1 \mathfrak{z}_1) + \\ + \cdots + \varepsilon^n (\mathfrak{z}'_n - A_0 \mathfrak{z}_n - A_1 \mathfrak{z}_{n-1}) + \cdots \end{aligned} \quad (13).$$

Weil ε jetzt beliebig ist, müssen die Koeffizientenausdrücke der ε -Potenzen verschwinden:

$$\mathfrak{z}'_0 - A_0 \mathfrak{z}_0 = 0 \quad (14),$$

$$\mathfrak{z}'_n - A_0 \mathfrak{z}_n = A_1 \mathfrak{z}_{n-1} \quad (15).$$

Ferner verlangt man, daß $\mathfrak{z}_0(0) = \eta_0$ und $\mathfrak{z}_n(0) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ sind.

Die Lösung der Differentialgleichung (14) lautet jetzt

$$\mathfrak{z}_0 = \Omega_0^t(A_0) \eta_0 \quad \dots \quad (16),$$

während (15) folgende Iterationsvorschrift liefert [1]:

$$\mathfrak{z}_n = \Omega_0^t(A_0) \int_0^t (\Omega_0^t(A))^{-1} A_1 \mathfrak{z}_{n-1} d\tau \quad \dots \quad (17).$$

Nun ist offenbar

$$\Omega_0^t(A) = \begin{pmatrix} \Omega_0^t(a) & 0 \\ 0 & \Omega_0^t(b) \end{pmatrix} \quad \dots \quad (18)$$

und demnach

$$(\Omega_0^t(A_0))^{-1} A_1 = \begin{pmatrix} 0 & (\Omega_0^t(a))^{-1} \psi \\ (\Omega_0^t(b))^{-1} \xi & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad (19).$$

Bezeichnet man noch kurz $(\Omega_0^t(a))^{-1} \psi$ $\Omega_0^t(b) = \kappa$ und $\Omega_0^t(b)^{-1} \xi$ $\Omega_0^t(a) = \sigma$, so gibt (17)

$$\mathfrak{z}_1 = \Omega_0^t(A_0) \begin{pmatrix} 0 & \int_0^t \kappa d\tau_1 \\ \int_0^t \sigma d\tau_1 & 0 \end{pmatrix} \eta_0 \quad \dots \quad (20),$$

$$\mathfrak{z}_2 = \Omega_0^t(A_0) \begin{pmatrix} \int_0^t \kappa d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \sigma d\tau_2 & 0 \\ 0 & \int_0^t \sigma d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \kappa d\tau_2 \end{pmatrix} \eta_0 \quad \dots \quad (21),$$

$$\mathfrak{z}_{2n} = \Omega_0^t(A_0) \begin{pmatrix} \int_0^t \kappa d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \sigma d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} \sigma d\tau_{2n} & 0 \\ 0 & \int_0^t \sigma d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \kappa d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} \kappa d\tau_{2n} \end{pmatrix} \eta_0 \quad \dots \quad (22),$$

$$\mathfrak{z}_{2n+1} = \Omega_0^t(A_0) \begin{pmatrix} 0 & \int_0^t \kappa d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \sigma d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n}} \sigma d\tau_{2n+1} \\ \int_0^t \sigma d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \kappa d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n}} \kappa d\tau_{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \eta_0 \quad \dots \quad (23).$$

Man definiert nun M_κ und M_σ wie folgt:

$$\begin{aligned} (\Omega_0^t(a))^{-1} \psi \Omega_0^t(b) &\leq M_\kappa \{k, n-k\} \\ (\Omega_0^t(b))^{-1} \xi \Omega_0^t(a) &\leq M_\sigma \{n-k, k\} \end{aligned} \quad \dots \quad (24).$$

In ähnlicher Weise, wie beim Herleiten der Ungleichung (5), erhält man

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t \kappa d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \sigma d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} \sigma d\tau_{2n} &\leq \frac{M_\kappa^n M_\sigma^n}{(2n)!} t^{2n} \{k, k\} \\ \int_0^t \sigma d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \kappa d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} \kappa d\tau_{2n} &\leq \frac{M_\kappa^n M_\sigma^n}{(2n)!} t^{2n} \{n-k, n-k\} \\ \int_0^t \sigma d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \kappa d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n}} \sigma d\tau_{2n+1} &\leq M_\sigma \frac{M_\kappa^n M_\sigma^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \{n-k, k\} \\ \int_0^t \kappa d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \sigma d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n}} \kappa d\tau_{2n+1} &\leq M_\kappa \frac{M_\kappa^n M_\sigma^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \{k, n-k\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (25)$$

Wegen (1) und (5) sowie mit Rücksicht auf die Eigenschaften von $(\Omega_0^t)^{-1}$ sind M_κ und M_σ jetzt endlich.

Die Lösung von (11) mit $\mathfrak{z}_\varepsilon(0) = \eta_0$ lautet nun

$$\mathfrak{z}_\varepsilon(t) = \Omega_0^t(A_0) \begin{pmatrix} r(t; \varepsilon) & s(t; \varepsilon) \\ u(t; \varepsilon) & v(t; \varepsilon) \end{pmatrix} \eta_0 = \Omega_0^t(A_0) \omega_0^t(A_1; \varepsilon) \eta_0 \dots \dots \dots (26),$$

wo

$$\left. \begin{aligned} r(t; \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} r_{2n} & r_{2n} &= \int_0^t \kappa d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \sigma d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} \sigma d\tau_{2n} \\ s(t; \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} s_{2n+1} & s_{2n+1} &= \int_0^t \kappa d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \sigma d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n}} \kappa d\tau_{2n+1} \\ u(t; \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} u_{2n+1} & u_{2n+1} &= \int_0^t \sigma d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \kappa d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n}} \sigma d\tau_{2n+1} \\ v(t; \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} v_{2n} & v_{2n} &= \int_0^t \sigma d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \kappa d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} \kappa d\tau_{2n} \end{aligned} \right\} \dots \dots (27)$$

sind.

Wegen der Beziehungen (24) konvergieren die Reihen (27) absolut und sogar gleichmäßig in t im ganzen Intervall. Die Matrizen $\Omega_0^t(A_0)$ und $\omega_0^t(A_1; \varepsilon)$ haben als Elemente absolut konvergente Reihen. Die Elemente der Matrix $\Omega_0^t(A_0) \omega_0^t(A_1; \varepsilon)$ lassen sich also in absolut konvergente ε -Potenzreihen ordnen. (26) schreibt sich demgemäß

$$\mathfrak{z}_{\varepsilon 1} = \mathfrak{z}_{01} + \varepsilon \mathfrak{z}_{11} + \varepsilon^2 \mathfrak{z}_{21} + \dots \dots \dots (28)$$

mit

$$\mathfrak{z}_{(2n)1} = \begin{pmatrix} \Omega_0^t(a) r_{2n} & 0 \\ 0 & \Omega_0^t(b) v_{2n} \end{pmatrix} \eta_0$$

und

$$\mathfrak{z}_{(2n+1)1} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_0^t(a) s_{2n+1} \\ \Omega_0^t(b) u_{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \eta_0.$$

Die Lösung der Differentialgleichung (2) mit $\mathfrak{z}(0) = \eta_0$ ist im Intervall $0 \dots h$ eindeutig. Nach (9) ist

$$\mathfrak{z}_\varepsilon = \overset{0}{\Omega_0^t} \eta_0 + \varepsilon \overset{1}{\Omega_0^t} \eta_0 + \varepsilon^2 \overset{2}{\Omega_0^t} \eta_0 + \dots$$

auch eine Lösung von (11) mit der Anfangsbedingung $\mathfrak{z}(0) = \eta_0$. Also ist notwendig

$$\mathfrak{z}_{01} + \varepsilon \mathfrak{z}_{11} + \varepsilon^2 \mathfrak{z}_{21} + \dots = \overset{0}{\Omega_0^t} \eta_0 + \varepsilon \overset{1}{\Omega_0^t} \eta_0 + \varepsilon^2 \overset{2}{\Omega_0^t} \eta_0 + \dots$$

In den Elementen der beiden obigen gleich großen Vektoren befinden sich jetzt ε -Potenzreihen, deren Konvergenzbereich der gleiche ist (diejenige der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$). Folglich sind die entsprechenden Koeffizienten der Potenzreihen gleich groß:

$$\mathfrak{z}_{\varepsilon 1} = \overset{*}{\Omega_0^t} \eta_0 \dots \dots \dots (29),$$

woraus

$$\overset{2n}{\Omega_0^t} = \begin{pmatrix} \Omega_0^t(a) r_{2n} & 0 \\ 0 & \Omega_0^t(b) v_{2n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overset{2n+1}{\Omega_0^t} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_0^t(a) s_{2n+1} \\ \Omega_0^t(b) u_{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \dots \dots (30)$$

folgt.

Nach Satz 3 ist nun

$$\Omega_0^t(A) = \begin{pmatrix} \Omega_0^t(a) \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} & \Omega_0^t(a) \sum_{n=0}^{\infty} s_{2n+1} \\ \Omega_0^t(b) \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1} & \Omega_0^t(b) \sum_{n=0}^{\infty} v_{2n} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (31),$$

wo die Matrizen r_{2n} , v_{2n} , s_{2n+1} und u_{2n+1} in (27) gegeben sind.

Bei der Bildung des Matrizanten für die Matrix (7) bildet man also zuerst die voneinander unabhängigen Matrizanten $\Omega_0^t(a)$ und $\Omega_0^t(b)$, wonach ihre „Kopplung“ mittels der Matrizen ξ und ψ zu dem Matrizanten $\Omega_0^t(A)$ führt. Bei $\xi \rightarrow 0$ und $\psi \rightarrow 0$ besteht der Lösungsvektor von $\mathfrak{z}' - A \mathfrak{z} = 0$ aus zwei voneinander unabhängigen Vektoren.

Die Teilung der Matrix A kann in $2^{n-1} - 1$ verschiedene Weisen gemacht werden, wenn man verlangt, daß a und b quadratisch sind.

Die Entwicklungsform (31) hat wenigstens in den folgenden zwei Fällen Vorteile: 1. Es sind $|\xi| \ll |a|$ und $|\psi| \ll |b|$, das ist, die Kopplung ist schwach. Es ist jetzt möglich, die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} s_{2n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} v_{2n}$ schon nach ein paar Glieder abzuberechnen. 2. Die praktische Ausrechnung des Matrizanten $\Omega'_0(A)$ ist schwierig — man kann vielleicht nur von der Definitionsgleichung (4) ausgehen — aber die Matrix läßt sich so teilen, daß die Bildung der Matrizanten $\Omega'_0(a)$ und $\Omega'_0(b)$ wegen der Eigenschaften von a und b besonders leicht wird.

Die größte Schwierigkeit beim Gebrauch der Form (31) dürfte darin bestehen, daß die Kehrmatrizen $(\Omega'_0(a))^{-1}$ und $(\Omega'_0(b))^{-1}$ benötigt werden.

Als Anwendung betrachten wir die gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen eines geraden Stabes der Länge h gemäß dem Gleichungssystem

$$(K y'')' - (P_1 y + Q_2 \varphi) = 0, \quad (G \varphi') - (P_2 y + Q_1 \varphi) = 0 \dots \dots (32),$$

wobei y die Durchbiegung und φ der Torsionswinkel ist.

P_2 , Q_1 , Q_2 , P_1 , K und G sind stetige Funktionen der Koordinat im Intervall $0 \dots h$. P_1 , P_2 , Q_1 und Q_2 enthalten außerdem die Kreisfrequenz ω .

Man schreibt (32) in Matrizenform wie folgt

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} (K y'')' \\ K y'' \\ y' \\ y \\ G \varphi' \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & Q_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 & Q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (K y'')' \\ K y'' \\ y' \\ y \\ G \varphi' \\ \varphi \end{pmatrix} = 0 \dots \dots (33).$$

Um die Form (31) anzuwenden, teilt man die obige Matrix wie folgt:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & Q_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 & Q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \end{array} \right) \dots \dots (34).$$

Also hat man

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & P_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & Q_1 \\ \frac{1}{G} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & P_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 0 & Q_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizanten $\Omega'_0(a)$ und $\Omega'_0(b)$ lassen sich jetzt — wegen der Verteilung der Elemente in a und b — ziemlich einfach bilden [2], wenn auch das Kehren derselben Schwierigkeiten mit sich bringen kann.

Den Matrizanten für die Matrix A bildet man also in dem man ihn an Hand der Formel (31) aus den Matrizanten der freien Biege- und Torsionsschwingungen desselben Stabes koppelt. Man kann gewissermaßen sagen, daß der Matrizant auf diese Weise physikalisch anschaulich gebildet wird.

Die gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen kommen besonders bei dem Flattern der Flügel eines Flugzeuges in Betracht. Die Aufgabe, die Fluggeschwindigkeiten zu bestimmen, bei welchen die Flügel flattern, kann auf eine Eigenwertaufgabe zurückgeführt werden, wo der Matrizant — in diesem Fall der Matrizant für die Matrix (34) — die Hauptrolle spielt.

Literatur

- [1] Schmeidler, W., Vorträge über Determinanten und Matrizen, Akademie-Verlag, Berlin 1949.
- [2] Hellman, O., Die Anwendung des Matrizanten bei Eigenwertaufgaben, Z. angew. Math. Mech. Bd. 35, Nr. 8, Aug. 1955.

KLEINE MITTEILUNGEN

Eine Verallgemeinerung des Kármán-Moore-Verfahrens zur Berechnung der linearisierten Überschallströmung um schlanke Drehkörper.

Bei der Berechnung der linearisierten Überschallströmung um einen schlanken Drehkörper benützt man bekanntlich zur Darstellung des Störströmungspotentials eine „Quellbelegung“ der Drehkörperachse (vgl. z. B. [1]).

Die Lage des Drehkörpers mit der Kontur $r(x)$ und die Anströmung seien wie in Bild 1 angenommen. $v_0 \cdot f(\xi)$ sei die Quellfunktion für die gerade Anströmung und $\alpha \cdot v_0 \cdot g(\xi)$ diejenige zur Berücksichtigung des Anstellwinkels α .

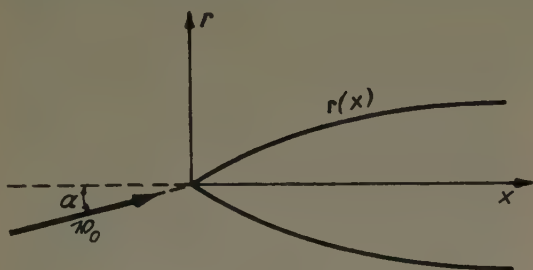


Bild 1

Die zu f , bzw. g gehörigen Potentiale seien mit

$$\varphi[f(\xi)], \text{ bzw. } \psi[g(\xi)] \cdot \sin \Theta$$

und die Ableitungen in der x -, bzw. r -Richtung mit

$$\begin{aligned} \varphi_x &= u[f(\xi)] & \psi_x &= \omega[g(\xi)] \\ \varphi_r &= v[f(\xi)] & \psi_r &= \chi[g(\xi)] \end{aligned}$$

bezeichnet (alles Funktionen von x und r !).

Die Funktionen f und g sind dann so zu bestimmen, daß für $r = r(x)$ die Randbedingungen

$$v[f(\xi)] = r'(x) = \frac{dr(x)}{dx} \quad \dots \quad (1)$$

und

$$\chi[g(\xi)] = -1 \quad \dots \quad (2)$$

erfüllt sind.

Der klassische Ansatz für f und g ist der Polygonzug-Ansatz von Kármán-Moore, bzw. Tsien ([2]):

$$f(\xi) = \begin{cases} \alpha_1 \xi & \text{für } \xi_0 = 0 < \xi < \xi_1 \\ \alpha_1 \xi + \alpha_2 (\xi - \xi_1) & \text{für } \xi_1 < \xi < \xi_2 \\ \dots & \dots \\ \sum_{v=1}^n \alpha_v (\xi - \xi_{v-1}) & \text{für } \xi_{n-1} < \xi \end{cases} \quad (3),$$

entsprechend für $g(\xi)$.

Probstein-Charyk ([3]) setzen dagegen für die Quellfunktionen je ein Polynom in ξ an ([3]):

$$f(\xi) = \sum_{v=1}^n \beta_v \xi^v \quad \dots \quad (4),$$

entsprechend für $g(\xi)$.

Dabei setzt man zur Bestimmung der n Koeffizienten in beiden Fällen die Randbedingungen (1), bzw. (2) für n verschiedene Punkte der Kontur an.

Der Ansatz (3) ist zwar rechnerisch sehr einfach zu handhaben, liefert aber dafür Strömungen, die gemäß den „Knicken“ der Quellfunktionen bereits in den ersten Ableitungen der Strömungskomponenten Unstetigkeiten zeigen und die die Randbedingungen außerhalb der n vorgeschriebenen Punkte nur schlecht erfüllen. Die Strömungen nach (4) ergeben naturgemäß eine gute Approximation, wenn die Konturfunktion $r(x)$ analytisch ist. Bei nicht-analytischem $r(x)$ ist dieser Ansatz physikalisch unsinnig, da hier die Strömungswerte an der Spitze von den Kontureigenschaften weiter hinten abhängen.

Zur Bestimmung der β_v von (4) ist ein Gleichungssystem mit einer vollen Matrix aufzulösen, während man bei (3) für die α_v ein gestaffeltes System erhält.

Es gibt jedoch eine Möglichkeit, den Ansatz (3) so zu verallgemeinern, daß einerseits die Güte der Approximation wesentlich verbessert wird und andererseits die Staffelnung des Gleichungssystems für die Koeffizienten erhalten bleibt:

Dazu setzt man die Quellfunktion $f(\xi)$ stückweise als Polynom k -ten Grades an und zwar so, daß an den „Flickstellen“ ξ_v ($v = 1, 2, \dots, n-1$) die Funktion samt ihren $(k-1)$ ten Ableitungen stetig ist.

Dieser Forderung trägt der folgende Ansatz Rechnung:

$$f(\xi) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k-1} b_i \xi^i + a_1 \xi^k & \text{für } \xi_0 = 0 < \xi < \xi_1 \\ \sum_{i=1}^{k-1} b_i \xi^i + a_1 \xi^k + a_2 (\xi - \xi_1)^k & \text{für } \xi_1 < \xi < \xi_2 \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{k-1} b_i \xi^i + \sum_{v=1}^n a_v (\xi - \xi_{v-1})^k & \text{für } \xi_{n-1} < \xi \end{cases} \quad (5).$$

Für $k=1$ geht (5) in den alten Ansatz (3) von Kármán-Moore über.

Zunächst kann man nun ein für allemal die $k-1$ „überzähligen“ Parameter b_i aus den Eigenschaften der Kontur an der Spitze bestimmen:

Setzt man nämlich $v[f(\xi)] = \sum_i b_i v[\xi^i]$ mit $r(x) = \sum_i m_i x^i$ in (1) ein und führt einen Koeffizienten-

vergleich bezüglich x durch, so erhält man ein gestaffeltes Gleichungssystem für die b_i . Aus diesem ergeben sich die b_i als universelle Funktionen der m_i und zwar hängt ein b_j genau von m_1, m_2, \dots, m_j ab. Es ist²⁾:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{m_1^2}{\sqrt{1-m_1^2}} \\ b_2 &= m_2 m_1 \frac{2 + \frac{1}{1-m_1^2}}{\sqrt{1-m_1^2} - m_1^2 \operatorname{ArCo} \frac{1}{m_1}} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6).$$

usw.

Nach der Bestimmung der b_i aus (6) erhält man durch Ansetzen der Randbedingungen (1) mit $f(\xi)$ nach (5) für n paarweise verschiedene Punkte der Kontur ein lineares Gleichungssystem für die a_v . Bei der Wahl der Punkte muß allerdings darauf geachtet werden, daß im Einflußbereich eines jeden Definitionsintervalls von $f(\xi)$ genau ein Punkt $(x^{(v)}, r^{(v)})$ mit $r'(x^{(v)}) = r'(r^{(v)})$ liegt; d. h. es muß

$$\xi_{v-1} < x^{(v)} - \sqrt{M_0^2 - 1} \cdot r^{(v)} \leq \xi_v \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

sein.

Das entstehende Gleichungssystem ist gestaffelt und sieht folgendermaßen aus:

$$\left. \begin{aligned} a_1 v[\xi^k](x^{(1)}, r^{(1)}) &= r'^{(1)} - B_k(x^{(1)}, r^{(1)}) \\ a_1 v[\xi^k](x^{(2)}, r^{(2)}) + a_2 v[\xi^k](x^{(2)} - \xi_1, r^{(2)}) &= r'^{(2)} - B_k(x^{(2)}, r^{(2)}) \\ \dots &\dots \\ \sum_{v=1}^n a_v v[\xi^k](x^{(n)} - \xi_{v-1}, r^{(n)}) &= r'^{(n)} - B_k(x^{(n)}, r^{(n)}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

¹⁾ Für $g(\xi)$ kann man ganz entsprechend vorgehen, die Durchführung wird hier nur für $f(\xi)$ dargestellt.

²⁾ unter der Voraussetzung $M_0 = \sqrt{2}$, die durch die Prandtl'sche Affinverzerrung stets erreicht werden kann.

mit der Abkürzung

$$B_k(x, r) = \sum_{i=1}^{k-1} b_i v[\xi^i](x, r).$$

Nach Auflösung des Gleichungssystems (7) läßt sich dann $u(x, r)$, das die Druckverteilung bestimmt, angeben:

$$u(x, r) = \sum_{i=1}^{k-1} b_i u[\xi^i](x, r) + \sum_{p=1}^{n'} a_p u[\xi^k](x - \xi_{p-1}, r);$$

dabei ist die zweite Summe über den ganzen Abhängigkeitsbereich zu erstrecken.

Die praktische Durchführung des Verfahrens mit Rechenautomaten, insbesondere die Berechnung der Funktionen $v[\xi^i]$ und $u[\xi^i]$, wird in der Mitteilung WGL 5 des Mathematischen Instituts der TH München ausführlich behandelt.

Im allgemeinen wird es vollauf genügen, für k den Wert 3 zu wählen. Bereits für $k=2$ ergeben sich gegenüber dem alten Kármán-Moore-Verfahren bei gleichem n ganz wesentliche Verbesserungen im Strömungsverlauf, wie Rechnungen an der TH München ergaben.

Über eine Möglichkeit, das hier geschilderte Verfahren weiter auszubauen, so daß Drehkörper behandelt werden können, deren Kontur Knicke aufweist, berichtete Herr Münch vom Math. Inst. der TH München im Heft 1/2 der Z. angew. Math. Mech.

München.

H. J. Stetter.

Literaturverzeichnis

- [1] Rob. Sauer, Einführung in die theoretische Gasdynamik, Springer Verlag, 1951.
- [2] Th. v. Kármán - N. B. Moore, The resistance of slender bodies moving with supersonic velocities, with special reference to projectiles, Transactions of the ASME, Bd. 54, Dez. 1952, und: H. Tsien, Supersonic flow over an inclined body of revolution, Journ. Aero. Sci. 5, 1938.
- [3] Probst-Charyk, A method for solving the linear potential equation for axially-symmetric flow, Journ. Aero. Sci. 19, Febr. 1952.

Die Göttinger Rechenmaschinen vom Benutzer aus gesehen.¹⁾

Dieser Bericht soll einen Überblick über die Arbeit an den Göttinger Rechenmaschinen geben — vom Benutzer aus gesehen. Zunächst werden die Hauptzüge der Maschinen in ihrer Auswirkung auf den Befehlscode erläutert. Die Erfahrungen hiermit und die Verwertung dieser Erfahrungen beim Bau der G1a werden beschrieben. Schließlich wird über die Arbeitseinteilung an den Maschinen G1 und G2 und über die von ihnen geleistete Arbeit berichtet.

Zum Befehlscode der G1

Bekanntlich ist die G1 eine bandgesteuerte Maschine, die mit dem Ziel einfachster Bedienbarkeit gebaut ist. Gewöhnliches Fernschreibband faßt sowohl Befehle wie Zahlen. 4 Abtaster (gewöhnliche Fernschreibsender) besorgen die Steuerung. Die Maschine ist langsam entsprechend der Geschwindigkeit der Fernschreibsender, die 7 Lochreihen/sec beträgt; das gibt pro Befehl etwa $\frac{1}{2}$ sec. Der kleine Trommel-Speicher von 26 Zahlen (10 stellige Dezimalzahlen mit festem Komma, absolut < 8) dient zur Aufbewahrung von Konstanten, im Moment gebrauchten Funktionswerten und Zwischenergebnissen. Der Hauptteil des Zahlenmaterials muß auf Bändern gespeichert werden.

Die 32 Zeichen des Fernschreibbandes sind aufgeteilt in

1. Ziffern (0 bis 9),
2. arithmetische Befehle,
3. organisatorische Befehle und

4. Ausgabe-Befehle. Dazu kommen noch

5. Entscheidungsbefehle, die in der G1 nachträglich eingebaut sind und zu denen mehr als 1 Zeichen verwandt wird.

Zur 4. Gruppe soll am Schluß im Zusammenhang mit den anderen Maschinen etwas gesagt werden.

Zur 3. Gruppe gehören in erster Linie die Vorzeichen p und n , die es erlauben, eingegebene Zahlen von Speichernummern zu unterscheiden. Von einer Zahl werden erst die Ziffern (dezimal), dann das Vorzeichen eingegeben, darauf folgt das Operationszeichen, das bestimmt, was mit der eingegebenen Zahl geschehen soll. Sollen die Ziffern Speichernummern bedeuten, so stehen sie ohne Vorzeichen hinter dem zugehörigen Operationszeichen (10 Speichern sind die Ziffern 0 bis 9 zugeordnet, die übrigen sind mit $a0 \dots a3$, $b0 \dots b3$, $c0 \dots c3$, $d0 \dots d3$ bezeichnet). Überdies kann an der Maschine eingestellt werden, daß ein Abtaster auf das Lesen des Vorzeichens hin anhält und ein bestimmter anderer Abtaster startet. So hat man 3 Zahlen-Quellen, die in folgender Weise verarbeitet werden:

1. Speicher: +3 „addiere die Zahl aus Speicher Nr. 3“
2. das Befehlsband selbst: 15 p + „addiere die Zahl 1,5“ (Komma stets hinter der 1. Ziffer)
3. Zahlband, das auf einem anderen Abtaster (z. B. Abtaster b) liegt: sb + „Starte Abtaster b (auf b wird eine Zahl abgelesen, auf das Vorzeichen hin hält b an und der zuerst gelaufene Abtaster fährt mit dem Lesen des Befehlsbandes fort) und addiere die gelesene Zahl ins Rechenwerk.“

Die Möglichkeit, Zahlen und Operationen direkt neben einander zu setzen, ohne den Umweg über den Speicher, hat sich außerordentlich bewährt bei allen Kontroll- und Probe-Rechnungen.

Die Buchstaben a, b, c, d können auch in die Gruppe der organisatorischen Befehle gerechnet werden. Oben ist erwähnt, daß sie zur Kennzeichnung der Abtaster dienen. Dazu kommt die Kennzeichnung der Speicher $a0 \dots a3$, $b0 \dots b3$, $c0 \dots c3$, $d0 \dots d3$. Alleinstehend schließlich bewirken sie die zyklische Vertauschung der entsprechenden Speicher, z. B. bedeutet der Befehl „ a “: bringe Inhalt von $a0$ nach $a1$, von $a1$ nach $a2 \dots$, von $a3$ nach $a0$. Damit sind „Änderungen 3. Art“²⁾ (z. B. von einem Integrationsschritt zum nächsten) bequem erledigt.

Beispiel: Es soll das Integral $\int_0^x f(x) dx$ einer numerisch gegebenen Funktion $f(x)$ gebildet werden nach der Formel

$$\int_{nh}^{(n+1)h} f(x) dx \approx \frac{h}{24} (-f_{n-1} + 13f_n + 13f_{n+1} - f_{n+2}).$$

Die Werte für $f(x)$ stehen der Reihe nach auf einem Zahlband auf Abtaster b . Nachdem der Anfang gesondert behandelt ist, muß das Befehlsband für die laufende Rechnung folgendes enthalten: Lies von Abtaster b die nächste, nämlich $(n+2)$ te Zahl und bringe sie nach $a0$. (In $a1 \dots a3$ stehen bereits die Werte f_{n+1}, \dots, f_{n-1}). Bilde die rechte Seite der Gleichung oben. Addiere das Ergebnis zu $\int_0^{nh} f(x) dx$. Vertausche die a -Speicher zyklisch. Da diese Befehlsfolge immer wieder zu durchlaufen ist, klebt man sie zum Ring zusammen. Eine Abzählung der Rechenschritte ist nicht nötig, da durch die Benutzung von Zahlbändern das Ende unmittelbar ersichtlich ist.

Zur Struktur der G1a

Soweit die G1. Fassen wir noch einmal die Punkte zusammen, die die Benutzung der Maschine einfach machen und deshalb in der G1a übernommen werden sollen.

¹⁾ Vortrag gehalten auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Berlin, Pfingsten 1955.

²⁾ K. Samelson-F. Bauer, Z. angew. Math. Mech. 34, 262 (1954).

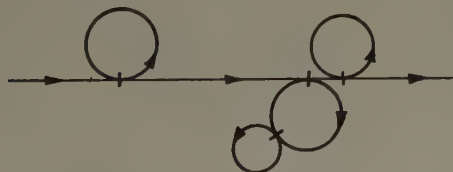
1. Übersichtlichkeit des Befehlsablaufs durch „externe“ Steuerung.
2. Ringförmige Befehlsbänder für Befehlsfolgen die öfter wiederholt werden; dazu die Möglichkeit, Wertefolgen im Speicher um einen Platz zu verschieben.
3. Zahlbänder als Hilfsspeicher
4. Möglichkeit, Zahlen direkt in den Befehlsgang einzufügen.

Dem stehen einige Punkte gegenüber, die in der G1a neu sind und weitere Erleichterungen bringen sollen:

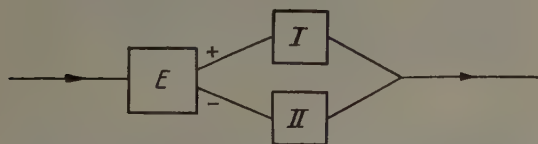
1. Fließendes Komma (Mantisse 13 Dezimalstellen im Bereich $10^{\pm 37}$) (G1: festes Komma, 10 Dezimalstellen)
2. Speicherkapazität 1840 Zahlen (G1: 26 Zahlen)
3. 10 photoelektrische Abtaster (G1: 4 Abtaster) mit einer Geschwindigkeit von 160 Zeichen/sec (G1: 7 Zeichen/sec).

Der Speicher wird aufgerufen über 10 Spürschalter. Es stehen 30 Spuren mit je 60 Plätzen zur Verfügung. Jeder Speicherplatz ist durch 3 Dezimalziffern xyz gekennzeichnet, z Spürschalter, an den die betreffende Spur angeschlossen ist, xy Nummer auf der betreffenden Spur ($x < 6$). Mit dem Befehl $Wz nm$ („Wähler z an nm “) wird Spur nm an Spürschalter z angeschlossen. Dabei kann eine Spur an mehreren Spürschaltern liegen. Innerhalb jeder Spur können die ersten $N = xy$ Zahlen zyklisch vertauscht werden: $Zxyz$ „Vertausche in der Spur an Schalter z die Speicher Nr. 0 bis xy zyklisch.“ Darüber hinaus gibt es 40 Konstantenspeicher, die 2-stellig ($1. \text{ Ziffer} \geq 6$) aufzurufen sind. Die Größe des Speichers bringt es mit sich, daß nun auch Wertefolgen einer Funktion in den Speicher geschrieben werden. Damit das Ende einer solchen Folge ohne Abzählung gefunden werden kann, ist eine Kennzeichenstelle vorgesehen, die als Entscheidungsgröße dienen kann. Weitere Entscheidungsbefehle richten sich nach dem Vorzeichen des Ergebnisses im Rechenwerk, nach dem Vorzeichen von dessen Exponenten (der die Kommastellung angibt) oder nach Schalterstellungen. Dies bedeutet eine beträchtliche Erweiterung gegenüber der G1, die nur auf Vorzeichen des Ergebnisses im Rechenwerk entscheiden konnte.

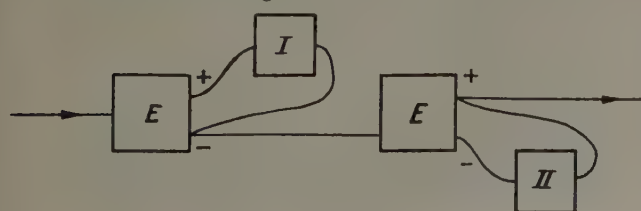
Ein Zug in der Struktur des Rechenablaufs ist allen bandgesteuerten Maschinen eigen: Die Bänder können nur an der Stelle wieder gestartet werden, wo sie das letzte Mal angehalten haben. Demgemäß dürfen im Flußdiagramm einer Rechnung nur geschlossene Schleifen auftreten, etwa



Das häufig vorkommende Schema:



(E = Entscheidung, I bzw. II vorgegebene arithmetische Operationen) muß aufgelöst werden in eine Folge von 2 Entscheidungen:



Bevor wir uns der G2 zuwenden, sollen noch einige Kleinigkeiten erwähnt werden, die der Erleichterung des Rechnens dienen: Benutzt man Zahlbänder als Hilfsspeicher, so muß nach Ablesen einer Zahl mit dem Ablesen des Befehlsbandes fortgefahren werden. Bei der G1 muß man vor Beginn der Rechnung festlegen, auf welchem Abtaster das Befehlsband liegt. Man kann nicht von 2 verschiedenen Befehlsbändern (auf 2 verschiedenen Abtastern) aus dasselbe Zahlband aufrufen. Bei der G1a hingegen wird nach Ablesen einer Zahl stets auf dem Abtaster fortgefahren, von dem aus der Aufruf des Zahlbandes erfolgte. Es wird dies erreicht durch ein besonderes Zeichen, das die Zahlen auf dem Zahlband beschließt, das aber auch sonst benutzt werden kann, wenn auf den zuvor gelaufenen Abtaster zurückgesprungen werden soll.

Sowohl bei der G1 wie bei der G1a ist in die Liste der arithmetischen Befehle das Wurzelziehen aufgenommen. Es dauert nur wenig länger als die Division und kann zur Herstellung komplizierter Funktionen mit verwendet werden.

Zum Befehlscode der G2

Die G2 ist eine Serienmaschine mit Magnettrommel. Sie wird vom Speicher aus gesteuert und rechnet etwa 10 mal so schnell wie die G1, also etwa 20 Operationen/sec; Rechenbereich $\pm 8, 15$ Dezimalstellen, festes Komma nach der 1. Ziffer. Befehle sind dargestellt durch zweistellige Oktalzahlen. Als Eingabe-Medium dient Fernschreibband. Um während des Rechnens bequem von einem Argumentwert auf den nächsten übergehen zu können, ist ein „Schrittregister“ eingeführt, dessen Inhalt vor Ausführung eines Befehls zu dessen Adresse hinzuaddiert werden kann.

Es wurde Wert darauf gelegt, die Ziffern bei der G2 in derselben Weise darzustellen, wie bei der G1, damit Zahlbänder von einer Maschine auf die andere übertragen werden können. So ist auch die Behandlung des Vorzeichens als besonderes Zeichen am Ende jeder Zahl beiden Maschinen gemeinsam. Da jetzt jedoch die Maschinenbefehle als Zahlen verschlüsselt werden, sind die übrigen Lochkombinationen des Fernschreibbandes verfügbar für weitere Angaben, die die Übernahme der Information vom Fernschreibband auf die Trommel steuern: Das Zeichen ω leitet Oktalzahlen ein, das Zeichen ρ beschließt positive ganze (Oktal- oder Dezimal-)Zahlen, die in „Hausnummernposition“ geschrieben werden (die Stellen, die den Adressenteil eines Befehls enthalten). ϵ schreibt solche Zahlen ins Schrittregister, α bedeutet das Ende eines Befehls. Eine große Erleichterung für das Programmieren ist die Möglichkeit, α durch die Zeichen $\beta, \gamma, \delta, \sigma\alpha, \sigma\beta, \sigma\gamma, \sigma\delta$ zu ersetzen. Die Zeichen $\gamma \dots \sigma\delta$ beziehen sich auf 6 Zahlsspeicher (je einen pro Zeichen), deren Inhalt vor Einschreiben des Befehls zur angegebenen Adresse zuaddiert wird. Dadurch können einmal hergestellte Programme mühelos an beliebigen Stellen des Speichers eingeschrieben werden (Änderungen 1. Art⁹⁾). Bei β wird zur Adresse des Befehls die Hausnummer, in der der Befehl selbst steht, hinzuaddiert (relative Adresse). Beispiel: Wird nach Speicher 300 der Befehl eingeschrieben „Sprung nach 10β “, so schreibt die Maschine auf die Trommel „Sprung nach 310“. β -Befehle sind also unabhängig von Änderungen, die man nachträglich in der Numerierung der Befehle vornimmt.

Ausgabe der Ergebnisse

Unsere ersten Erfahrungen an der G2 zeigten, daß es erforderlich ist, die Ergebnisse schnell in übersichtlicher Weise ausdrucken zu können. G1 und G1a arbeiten mit Schreibmaschine, G2 mit Fernschreiber. Alle Maschinen lassen automatisch nach jeder Zahl einen Zwischenraum.

⁹⁾ H. Goldstine-J. von Neumann, Planning and Coding of Problems for an Electronic Computing Instrument, Part II, 3; vgl. auch K. Samelson-F. Bauer, I. c.

Für die G1 ist ausreichend, daß zusätzlicher Zwischenraum einprogrammiert werden kann und daß an der Maschine eingestellt wird, bei jedem wievielten so einprogrammierten Zwischenraum der Wagen zurückläuft. Die auszudruckende Stellenzahl ist an der Maschine fest einzustellen, kann allerdings durch einen Trick vom Programm her verringert werden.

An der G2 hat man die Möglichkeit, die auszudruckende Stellenzahl vom Programm her zu bestimmen, während ursprünglich die Anzahl der Zahlen pro Zeile an der Maschine eingestellt werden mußte. Dieses System erwies sich als zu steif. Mit wenig technischem Aufwand ließ sich jedoch erreichen, daß Wagenrücklauf und Zwischenraum programmiert werden können (durch je 2 Befehle). Damit läßt sich jede gewünschte Druckanordnung herstellen. Für die G1a ist der Gebrauch eines Tabulators geplant. Erfahrungen hiermit liegen noch nicht vor.

Arbeitseinteilung an der G1

Die G1 ist seit Herbst 52 in Betrieb. Sie läuft 24 Stunden am Tag, davon sind etwa 18 Stunden gute Rechenzeit. Die Wartung und Reparatur wird von einem Elektroingenieur besorgt. Daß dieser nachts nur beschränkt zur Verfügung steht, bedingt einen Teil des Ausfalls (2,5 Stunden pro Tag). 2,0 Stunden entfallen auf Rechnungen, die durch Maschinenfehler verdorben sind. 1,5 Stunden dienen der eigentlichen Reparatur und Wartung. Außerdem steht die Maschine etwa 40 Tage im Jahr still wegen Generalüberholung oder an hohen Feiertagen. Als Besitzer der G1 nutzt das Institut für Astrophysik etwa 35% der zur Verfügung stehenden Rechenzeit. Rechnerinnen verschiedener Vorbildung (Volksschule + Ausbildung an Tischrechenmaschinen, Abitur) bedienen während dieser Zeit die Maschine. Das Rechenprogramm wird von akademisch ausgebildeten Kräften erstellt. Die übrige Zeit steht die Maschine dem Max-Planck-Institut für Physik und anderen Interessenten (in der Hauptsache wissenschaftlichen Instituten) zur Verfügung. Bedingung für die Benutzung der G1 ist wissenschaftliches Interesse des Problems und Veröffentlichung der Resultate. Zur Erlernung von Programmierung und Bedienung der G1 hofft das Institut für Astrophysik, daß sich die Benutzer weitgehend gegenseitig helfen. Kurse werden nicht abgehalten. Die behandelten Probleme sind in erster Linie gewöhnliche Differentialgleichungen, die Näherungen oder spezielle Lösungen partieller Differentialgleichungen liefern. Zum Teil wurden auch partielle Differentialgleichungen (hyperbolischen Charakters) direkt gerechnet. Dazu kommt: Auflösung linearer Gleichungssysteme (bis 9×9), Berechnung von Funktionen u. ä. und Auswertung von Meßergebnissen. Die beigefügte Tabelle gibt einen Überblick über die Themen.

Tabelle

Auf der G1 durchgeführte Rechnungen
vom 8. 10. 52 bis 31. 12. 54.

I. Astrophysik	
(Störmerbahnen, Schrödinger-Gleichung, kraftfreie Magnetfelder; magnethydrodynamische Stoßwellen; usw.)	
	4669 Std.
II. Physik	
(Nichtlineare Wellengleichung; Zweizentrenintegrale der Molekülphysik; nichtstationäre Stoßwellen; Stoßelektronen durch Mesonen, Elektronen-Streuung; Thomas-Fermi-Modell für schwere Kerne; usw.)	
	4649 Std.
III. Andere Forschungsgruppen	
(Nichtstationäre Turbulenz; Überschallströmung; Grenzschichten; Apparate-Korrektur von Spektrellinien; elektr. Filterschaltungen; usw.)	
	1988 Std.

Stundenverrechnung für das Jahr 1954

Gesamtstunden	8760 Std. = 100%
Gesamtbedarf	7771 „ = 89%
Betriebsstunden	7022 „ = 80%
Nützliche Rechenzeit	5861 „ = 67%
Ausfall	611 „ = 7%
Wartung und Reparatur	550 „ = 6%

Arbeitseinteilung an der G2

Die Organisation des Rechnens an der G2 erweist sich als schwieriger als an der G1. Auch die G2 arbeitet im 24 Stunden-Betrieb. Da die Eingabe von Programmen verhältnismäßig viel Zeit erfordert, ist es sinnvoll, Zeitabschnitte von einigen Tagen für ein Programm zur Verfügung zu stellen und diese nicht zu streng zu begrenzen. Um nun die zugeteilte Zeit voll ausnutzen zu können, müssen zu jedem Problem mindestens 3 Leute sein, die sich gut genug in dem Programm zurechtfinden, um auftretende Schwierigkeiten während der Rechnung zu beheben. Auch das Programmieren selbst ist schwieriger als an der G1, so daß es zweckmäßig ist, kurze Einführungskurse zu halten. Die größere Kapazität und die größeren logischen Möglichkeiten einer trommelgesteuerten gegenüber einer bandgesteuerten Maschine bringen naturgemäß komplizierteres Programmieren mit sich. Die Praxis, auf die G1 einfache Hand-Rechenprogramme direkt zu übersetzen, läßt sich auf die G2 nicht sinnvoll anwenden. Im übrigen sind unsere Erfahrungen mit der G2 zu kurz, um ein endgültiges Urteil über die beste Arbeitsweise zu erlauben. Auch kann noch kein statistischer Überblick über Zeitaufteilung und Art der behandelten Probleme gegeben werden. Die Größe der Maschine ist geeignet, partielle Differentialgleichungen mit 2 unabhängigen Variablen zu behandeln, lineare Gleichungssysteme mit etwa 40 Unbekannten und ähnlich umfangreiche Aufgaben.

Göttingen.

Eleonore Trefftz.

Die Differentialgleichungen der Strömung einer inkompressiblen Newtonschen Flüssigkeit in einem Wendelkanal.

Zur klaren Formulierung des hier ins Auge gefaßten Problems werde zunächst von der Strömung in einem Hohlzylinder unbegrenzter Länge und beliebigen Querschnitts ausgegangen [1]. Dieser Zylinder werde so deformiert, daß die Längsachse eine Schraubenlinie beschreibt. Die Berechnung der Strömung innerhalb des dabei entstehenden Wendelkanals für spezielle Querschnitte ist das hier gesteckte Ziel, und in dieser Arbeit sollen zunächst die entsprechenden Differentialgleichungen aufgestellt werden. Wir beschränken uns hierbei auf die Behandlung inkompressibler Newtonscher Flüssigkeiten, und es sind nur stationäre Lösungen, die außerdem von der Länge des Kanals fortschreitenden Koordinate unabhängig sind, von Interesse. Die antreibende Kraft der Strömung kann durch einen Druckgradienten in Kanalrichtung aber auch durch spezielle inhomogene Randbedingungen für die Geschwindigkeit an der Kanalwand gegeben sein.

Auf das hier angedeutete Problem führt ein technisch außerordentlich bedeutungsvoller Strömungsvorgang. Es handelt sich hierbei um die Stoffbewegung in Schneckenmaschinen, die in der keramischen und kunststoffverarbeitenden Industrie eine wichtige Rolle spielen [2]. Auf die technische Seite des Problems soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

Die entsprechenden Grundgleichungen sind die bekannten Navier-Stokeschen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung [3]. Zur Erfüllung der Randbedingungen ist es notwendig, diese in einem geeignet gewählten Wendel-Koordinatensystem zu lösen. Zu diesem Zweck soll hier von der Komponentendarstellung der Grundgleichungen ausgegangen werden,

die in jedem beliebigen Koordinatensystem x^1, x^2, x^3 gilt¹⁾. Speziell für inkompressible Flüssigkeiten und stationäre Lösungen ohne äußere Krafteinwirkungen erhält man dabei folgende Beziehungen [4]:

$$\rho V^k_{;l} V^l = -P_{;k} + \mu V^k_{;l;l}, \\ V^k_{;k} = 0.$$

Hierbei können die Indizes k, l, \dots die Werte 1, 2, 3 durchlaufen und es gilt die bekannte Regel, daß über einen bestimmten Index, der gleichzeitig oben und unten auftritt, summiert wird. V^k ist die (mathematische) kontravariante Komponente des Geschwindigkeitsvektors, P der Druck, ρ die Dichte und μ die Viskosität. Mit dem Semikolon wird die kovariante Ableitung gekennzeichnet

$$V^k_{;l} = V^k_{,l} + \Gamma^k_{ml} V^m.$$

Diese setzt sich zusammen aus der gewöhnlichen Ableitung $V^k_{,l}$

$$V^k_{,l} = \frac{\partial V^k}{\partial x^l}$$

und zusätzlichen Termen, in denen die Christoffel-Symbole Γ^k_{ml} auftreten.

Das dem Problem angepaßte Koordinatensystem ist abhängig von der Querschnittsform des Wendelkanals, die man zweckmäßig durch einen Schnitt senkrecht zur Wendelachse ermittelt. In Hinblick auf die oben angedeutete technische Anwendung sind hierbei Querschnitte in Form eines Kreisringsektors von Interesse²⁾. Dies führt auf ein nichtorthogonales Koordinatensystem $x^1 = u, x^2 = v, x^3 = w$, das durch folgende Transformationsgleichungen gegeben wird:

$$x = u \cos(v + \alpha w),$$

$$y = u \sin(v + \alpha w),$$

$$z = w.$$

Hierbei zeigt die kontravariante Komponente V^w in Kanalrichtung, während V^u und V^v wie V^r und V^φ bei gewöhnlichen Kreiszyylinderkoordinaten liegen. In den neuen Koordinaten u, v, w haben die Navier-Stokesschen Gleichungen folgende Form:

$$\rho \{ V^u_{;u} V^u + V^u_{;v} V^v - u (V^v + \alpha V^w)^2 \} = -P_{;u} \\ + \mu \left\{ V^u_{;uu} + \left(\frac{1}{u^2} + \alpha^2 \right) V^u_{;vv} + \frac{3}{u} V^u_{;u} \right. \\ \left. + \frac{1}{u^2} V^u - \frac{2\alpha}{u} V^w_{;v} \right\},$$

$$\rho \left\{ V^v_{;u} V^u + V^v_{;v} V^v + \frac{2}{u} V^u V^v + \frac{2\alpha}{u} V^u V^w \right\} \\ = - \left(\frac{1}{u^2} + \alpha^2 \right) P_{;v} + \alpha P_{;w} \\ + \mu \left\{ V^v_{;uu} + \left(\frac{1}{u^2} + \alpha^2 \right) V^v_{;vv} + \frac{3}{u} V^v_{;u} \right. \\ \left. + \frac{2}{u^3} V^u_{;v} + \frac{2\alpha}{u} V^w_{;u} \right\},$$

$$\rho \{ V^w_{;u} V^u + V^w_{;v} V^v \} = -P_{;w} + \alpha P_{;v} \\ + \mu \left\{ V^w_{;uu} + \left(\frac{1}{u^2} + \alpha^2 \right) V^w_{;vv} + \frac{1}{u} V^w_{;u} \right\}.$$

Hinzu tritt die Kontinuitätsgleichung

$$V^u_{;u} + \frac{1}{u} V^u + V^v_{;v} = 0.$$

¹⁾ Es handelt sich hierbei um beliebige Koordinatensysteme im dreidimensionalen euklidischen Raum, die Zeit wird nicht transformiert.

²⁾ Bei anderen Querschnittsformen führt der hier eingeschlagene Weg ebenfalls zum Ziel, wenn man noch eine einfache Transformation anschließt, die w unverändert läßt und nur u, v durch neue Koordinaten u^*, v^* ersetzt.

Nach Voraussetzung wurden hierbei sämtliche Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten nach w gleich null gesetzt.

Eine Untersuchung über einfache Strömungen im Wendelkanal soll in einer anschließenden Arbeit durchgeführt werden.

Literatur

- [1] L. Prandtl, Führer durch die Strömungslehre (Braunschweig 1956) S. 152.
- [2] H. Beck, Kunststoffe 43, 530 (1953).
- [3] G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik (Leipzig 1945) S. 168.
- [4] A. Sommerfeld, Mechanik der deformierbaren Medien (Leipzig 1949) S. 364.

Berlin-Adlershof.

Siegfried Kästner.

Einfache Darstellung dynamischer und hydrodynamischer Probleme durch Einführung logarithmischer Maßstäbe

1. Einleitung und Bezeichnungen

In dieser Arbeit sollen einige Beispiele aus der Dynamik und Hydrodynamik kurz behandelt werden, wobei die funktionalen Zusammenhänge sich einheitlich und übersichtlich durch Exponentialfunktionen bzw. hyperbolische Funktionen darstellen lassen. Die Beispiele behandeln aus der Dynamik das physikalische Pendel, die Zentralbewegung des Massenpunktes bei sowohl elastischer Bindung (Kraft proportional der Verlängerung), wie bei Newtonscher Anziehung, aus der Hydrodynamik das Zusammenwirken von Schwerkraft und Kapillarkraft bei kleinen Wellenlängen und aus der Hydraulik das „Strömen“ und „Schießen“ in offenen Gerinnen.

Es sind folgende Bezeichnungen eingeführt:

- A = konst., definiert durch $U(r) = -Ar^{-1}$ bei Newtonscher Anziehung,
 b = Federkonstante, definiert durch $U(r) = \frac{b}{2} r^2$ bei elastischer Bindung,
 b_0 = Kanalbreite,
 $C(r)$ = Energiefunktion, definiert durch $C(r) = \frac{I^2}{2mr^2} + U(r)$,
 c = Wellengeschwindigkeit, d = Wassertiefe,
 e = Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems,
 F = Kanalquerschnitt,
 g = Beschleunigung der Schwere, h = hydraulische Höhe,
 H = Höhe der Energielinie,
 I = Impulsmoment (Winkelbewegungsgröße),
 l = reduzierte Pendellänge,
 M = Masse (schwingende Masse), m = Masse (kreisende Masse),
 Q = sekundliche Wassermenge, r = Radiusvektor,
 s = Abstand vom Aufhängepunkt zum Schwerpunkt,
 T = Schwingungsdauer, t = Zeit,
 U = potentielle Energie (Energie der Lage),
 v = Geschwindigkeit,
 z = Höhe der Kanalsohle oberhalb eines beliebigen Nullniveaus,
 α = Auslenkungswinkel bzw. Winkel des Radiusvektors, $\beta^3 = \frac{Q^2}{2gb_0^3}$,
 Θ = Trägheitsmoment, Θ_A für Aufhängepunkt, Θ_s für Schwerpunkt,
 λ = Wellenlänge,
 σ = Kapillarkonstante,
 φ = unabhängig Veränderliche (logarithmisch),
 ϱ = spezifische Masse (Dichte).

2. Einführende Bemerkungen

Es handelt sich um Probleme, die sich mathematisch durch Funktionen folgender Form darstellen lassen

$$f_1(x) = \text{konst.} \cdot (x + x^{-1}) \dots (1),$$

$$\text{bzw.} \quad f_2(x) = \text{konst.} \cdot x^{-n} (x \pm x^{-1}) \dots (1a)$$

Durch Übergang zum logarithmischen Maßstab definiert durch

$$\varphi = \ln x, \text{ bzw. } x = e^\varphi$$

ergibt sich im ersten Fall

$$f_1(\varphi) = \text{konst.} \cdot \mathcal{C} \varphi,$$

wobei die Konstanten sich durch den Faktor 2 von einander unterscheiden. Das Minimum von $f_1(\varphi)$ ergibt sich für $\varphi = 0 (x = 1)$ (tiefster Punkt der Kettenlinie).

Im zweiten Fall wird

$$f_2(\varphi) = \text{konst.} \cdot e^{n\varphi} \mathcal{C} \varphi, \text{ bzw. } f_2(\varphi) = \text{konst.} \cdot e^{n\varphi} \sin \varphi \quad (2)$$

je nach Vorzeichen. Das Minimum ergibt sich für

$$\frac{df_2(\varphi)}{d\varphi} = -\text{konst.} \cdot e^{n\varphi} (n \mathcal{C} \varphi + \sin \varphi) \quad (3)$$

also gleich Null für $\mathcal{C} \varphi = -n$, also muß $n < |1|$ sein. Für

$$f_2(\varphi) = \text{konst.} \cdot e^{n\varphi} \sin \varphi \quad (2a)$$

wird die erste Ableitung

$$\frac{df_2(\varphi)}{d\varphi} = \text{konst.} \cdot e^{n\varphi} (n \sin \varphi + \mathcal{C} \varphi) \quad (3a),$$

also $\mathcal{C} \varphi = -n^{-1}$, d. h. es muß $n > 1$ sein. Diese Andeutungen mögen durch die folgenden Beispiele näher erläutert werden.

3. Beispiele, die sich der Funktion $f_1(x)$ unterordnen lassen

a) Das physische Pendel, dessen Schwingungsdauer [1]

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_s}{g} \left(\frac{s}{R_s} + \frac{R_s}{s} \right)} \quad (4)$$

beträgt, wird mit $s/R_s = e^\varphi$, $R_s/s = e^{-\varphi}$, d. h. $\varphi = \ln \frac{s}{R_s}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_s}{g}} 2 \cos \varphi \quad (4a).$$

Stellt man $l/R_s = s/R_s + R_s/s$ als Funktion von s/R_s dar, ergibt sich die Kurve in Bild 1, als Funktion von φ dagegen die Kurve des Bildes 2 (Kettenlinie).

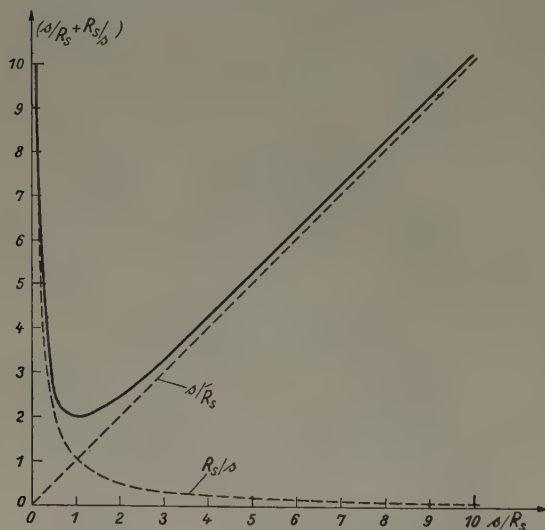


Bild 1

b) Bei kleinen Wellenlängen macht sich neben der Schwerkraft auch die Kapillarkraft geltend. Da sie auf eine Glättung der welligen Oberfläche hinwirkt, bringt sie eine Vergrößerung der Geschwindigkeit. Mit σ gleich der Zugspannung wird das Quadrat der Geschwindigkeit [2]

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} = g\sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}} \left(\sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}} \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}} \right) \quad (5),$$

welcher Ausdruck damit auf die Form der Gl. (1) gebracht ist, in dem $x = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}}$ gesetzt wird, womit auch

$$\varphi = \ln \left(\frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}} \right) \quad (6)$$

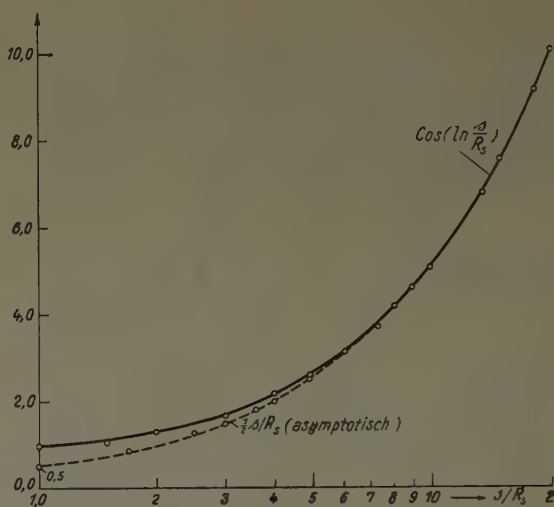


Bild 2

dimensionslos herauskommt. Es sei weiter das Minimum von c als Funktion von λ berechnet, womit erhalten wird

$$2c \frac{dc}{d\lambda} = \frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^2},$$

woraus sich derjenige Wert von

$$\lambda = \lambda_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$$

ergibt, für welchen $c = c_{\min} = \sqrt{\frac{4g\sigma}{\rho}}$ wird. λ_1 ist aber gleichzeitig der Wert von λ , bei dem die beiden Glieder zum Quadrat der Geschwindigkeit c den gleichen Beitrag liefern (weil in diesem Fall $g\lambda/2\pi = 2\pi\sigma/\rho\lambda$ ist). Führt man den obigen Wert von λ_1 und c_{\min} ein, so kann die Gleichung für c^2 auf die folgende übersichtliche Form gebracht werden

$$\frac{c^2}{c_{\min}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda} \right),$$

womit die Funktion für c^2/c_{\min}^2 auf dieselbe Gestalt gebracht ist wie die Funktion für die reduzierte Pendellänge im vorigen Beispiel.

c) Zentralbewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer elastischen Bindung $b \cdot r$ (b = Federkonstante). Bei der Zentralbewegung ist bekanntlich das Impulsmoment konstant

$$I = m r^2 \frac{d\alpha}{dt} = \text{konst.} \quad (7).$$

Die Energiegleichung lautet

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(r) \quad (8),$$

wo E die Gesamtenergie und $U(r)$ die potentielle Energie bedeuten. Durch diese beiden Gleichungen, die konstantes Impulsmoment und konstante Gesamtenergie ausdrücken, ist die Bahn des Massenpunktes festgelegt. Geht man z. B. von einem bestimmten Punkt P mit einer bestimmten Geschwindigkeit aus, so erreicht man nach der Zeit dt einen um $v dt$ davon entfernten Punkt P' . Aus dem Energiesatz ergibt sich der Betrag von v im Punkt P' . Damit ist aber mit der Konstanz des Impuls-

momentes nur eine ganz bestimmte Richtung von v im Punkte P' verträglich. Somit legen Energie und Impulsmoment sowohl Betrag wie Richtung von v im neuen Punkt P' fest. Auf diese Weise kann man grundsätzlich fortfahren und so die ganze Bahn konstruieren.

Für die analytische Durchführung liefern Gl. (7) und (8) den Zugang zum ganzen Problem. Um das einzusehen, werden in der Gleichung für E ebenfalls Polarkoordinaten (r, α) eingeführt, womit für das Quadrat der Geschwindigkeit

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

erhalten wird. Gl. (8) geht damit über in

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + U(r) = E \quad \dots (8a).$$

Wird nun $(d\alpha/dt)$ aus Gl. (7) in (8a) eingeführt, ergibt sich

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{1}{m} \left(2E - 2U(r) - \frac{I^2}{mr^2}\right)} \quad \dots (9).$$

Wird Gl. (7) in der Form geschrieben

$$r^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{I}{m} \quad \dots (7a)$$

erhält man nach Division der Gl. (9) durch Gl. (7a)

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\alpha} = \sqrt{\frac{2m}{I^2} \left(E - U(r) - \frac{I^2}{2mr^2}\right)} \quad \dots (9a).$$

Gl. (9) ergibt den Abstand r als Funktion der Zeit ohne Rücksicht auf den jeweiligen Wert α ; Gl. (9a) dagegen liefert r als Funktion vom Winkel α ohne Rücksicht auf die Zeit. Ohne weitere Rechnung gewährt Gl. (9) einen Einblick in den Charakter der durch Gl. (7) und (8) gegebenen Beziehungen, und zwar durch Beachtung der Tatsache, daß der Radikand in Gl. (9a) nie negativ werden darf. Die Größe

$$E - U(r) - \frac{I^2}{2mr^2} > 0 \quad \dots (9b)$$

stellt den auf die Radialkomponente entfallenden Teil der kinetischen Energie dar. [3] Zeichnet man nun den Verlauf von $U(r) + \frac{I^2}{2mr^2}$ als Funktion von r/r_0 auf, so erhält man eine der in Bild 3 dargestellten, ähnlichen Kurve [1]. Bezeichnet man mit $C(r)$ den Ausdruck

$$C(r) = U(r) + \frac{I^2}{2mr^2} = \frac{1}{2} I \sqrt{\frac{b}{m}} \left(\frac{I}{\sqrt{mb}} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{\sqrt{mb}}{I} r^2 \right) \quad (10)$$

wo $r_0^2 = I/\sqrt{mb}$, ergibt sich

$$C(r) = \frac{b}{2} r_0^2 \left(\frac{r^2}{r_0^2} + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \quad \dots (10a).$$

Durch Einführung von $r^2/r_0^2 = e^\varphi$, also

$$\varphi = 2 \ln \frac{r}{r_0} \quad \dots (6a)$$

entsteht die in Bild 2 dargestellte Beziehung

$$C(\varphi)/b r_0^2 = \cos \varphi \quad \dots (10b).$$

Durch Einführung von Exponentialfunktionen e^φ und $e^{-\varphi}$ für die in den Klammerausdrücken stehenden reziproken Größen der Gl. (4), (5) und (10) bzw. (10a) — oder anders ausgedrückt — durch Einführung logarithmischer Maßstäbe, erhält man eine Darstellung wie in Bild 2 gegeben.

Die angegebenen Fälle mögen genügen, lassen sich aber ohne Schwierigkeit erweitern.

4. Beispiele, die sich der Funktion $f_2(x)$ unterordnen lassen

a) Zentralbewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer Newtonschen (oder Colombschen) Bin-

dung. Die der Kurve $C(r)$ entsprechende Gl. (10) des vorigen Abschnitts lautet nunmehr

$$C(r) = U(r) + \frac{I^2}{2mr^2} = -\left(\frac{A}{r} - \frac{I^2}{2mr^2}\right) \quad (11),$$

die sich auf folgende Form bringen läßt

$$C(r) = 2m \left(\frac{A}{I}\right)^2 \left(\frac{I^2}{2mA}\right)^{3/2} r^{-3/2} \left[\frac{I}{(2mA)^{1/2}} r^{-1/2} - \frac{(2mA)^{1/2}}{I} r^{1/2} \right] \quad \dots (11a).$$

Mit der neuen Veränderlichen

$$x = 2mA r/I^2 \quad \dots (12)$$

wird die Funktion

$$C(x) = +2m \left(\frac{A}{I}\right)^2 x^{-3/2} (-x^{-1/2} + x^{1/2}) \quad (11b),$$

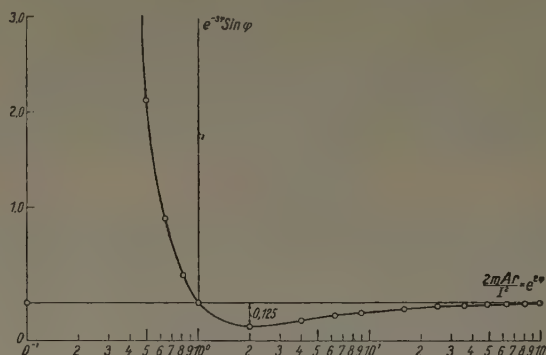


Bild 3

die in Bild 3 dargestellt ist, und für $x_0 = 2$, d. h. für

$$r = r_0 = \frac{I^2}{mA} \quad \dots (12a)$$

einen Extremwert (Minimum) vom Wert $E_{\min} = -\frac{A}{2r_0} = -\frac{A^2 m}{2I^2}$ hat.

Durch Einführung von

$$e^{-\varphi} = \frac{(2mA)^{1/2}}{I} r^{1/2} \quad \dots (12b)$$

ergibt sich ähnlich wie unter Abschnitt 3, Beispiele a) bis c)

$$C(\varphi) = +4m \left(\frac{A}{I}\right)^2 e^{+3\varphi} \sin \varphi \quad \dots (11c).$$

wobei die neue Veränderliche

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{I^2}{2mA r} \right)$$

ist, wobei der Extremwert für

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2} \ln 2 = -0,3466.$$

eintritt. In Bild 3 ergibt sich der Verlauf der $C(r)$ -Kurve bereits aus der Bemerkung, daß in dem Ausdruck $-\frac{A}{r} + \frac{I^2}{2mr^2}$ für sehr große r allein der erste, für sehr kleine r dagegen der zweite Summand wesentlich ist. Dazwischen liegt ein Minimum bei $r_0 = \frac{I^2}{2mA}$ vom Wert $E' = -\frac{A}{2r_0} = -\frac{2Am}{I^2}$. Zeichnet man eine Parallele zur Abszissenachse mit der Ordinate E („ E -Gerade“), kommen für die Bahn des Massenpunktes nur solche r -Werte in Betracht, für welche die E -Gerade oberhalb der C -Kurve liegt, denn nur dort ist Gl. (9b) positiv. Eine Umkehr der Bewegungsrichtung hinsichtlich r , d. h. ein Übergang von positiven zu negativen

dr/dt ist nur dort möglich, wo $dr/dt = 0$ wird, also nach Gl. (9) nur an einem Schnittpunkt der E -Geraden mit der C -Kurve. Im Fall der Newtonschen (oder Culomb'schen) Bindung $U(r) = -Ar^{-1}$ gibt es einen kleinsten Wert $E = E'$, für welchen allein eine Kreisbahn (Radius r_0) möglich ist. Für größere Werte hat man, solange E negativ ist, wieder zwei Schnittpunkte mit der C -Kurve, entsprechend dem größten und kleinsten Wert von r (Aphel- und Periheldistanz r_2 bzw. r_1), wie es bei der Planetenbahn der Fall ist. Sowie aber E positiv wird, hat man nur einen Schnittpunkt mit der C -Kurve. Der Massenpunkt wird als Komet ins Unendliche entweichen, und zwar wird er je nachdem ob für $t = 0$ die Geschwindigkeit dr/dt positiv oder negativ ist, sogleich mit dieser Flucht von der Sonne beginnen oder sich erst bis auf den kürzesten Abstand nähern, bevor er sich für immer entfernt.

b) Als letztes Beispiel betrachten wir die Strömung in einem Kanal von rechteckigem Querschnitt. Für einen Punkt der Spiegelfläche eines offenen Gerinnes von der Tiefe d und der mittleren Geschwindigkeit v ist die hydraulische Höhe oder Strömungsenergie je Masseneinheit bezogen auf eine um die Höhe z unter der Sohle liegende waagerechte Ebene, durch den Ausdruck gegeben [4],

$$h = \frac{v^2}{2g} + d + z. \quad (13),$$

indem vom Luftdruck abgesehen wird.

Trägt man für verschiedene aufeinanderfolgende Querschnitte die zugehörige Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ vom Spiegel aus nach oben auf und verbindet die Endpunkte dieser Höhen, so erhält man die in der Hydraulik als Energielinie bezeichnete Kurve. Dementsprechend heißt die auf die Sohle des Gerinnes bezogene Höhe

$$h - z = H = \frac{v^2}{2g} + t. \quad (13a)$$

die „Energielinienhöhe“ (Bild 4), die unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung $Q = Fv$ (Q = sekundlicher

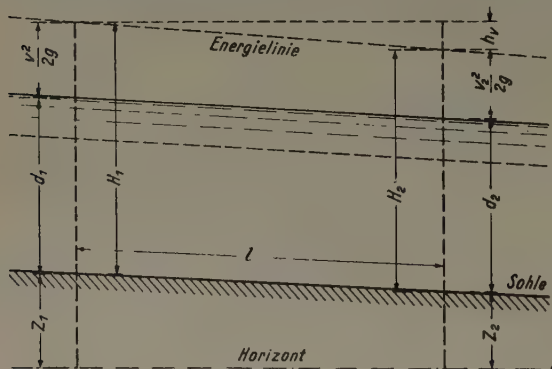


Bild 4

Durchflußmenge) auch wie folgt geschrieben werden kann.

$$H = \frac{Q^2}{2g F^2} + d. \quad (13b).$$

Die weitere Untersuchung sei auf rechteckige Querschnitte von konstanter Breite b_0 beschränkt. Damit wird

$$v^2 = Q^2/F^2 = \frac{Q^2}{b_0^3 d^2}. \quad (14)$$

und wenn man zur Abkürzung setzt

$$\beta^3 = \frac{Q^2}{2g b_0^3}. \quad (15),$$

geht Gl. (13 b) nach einfacher Umformung über in

$$H d^2 = d^3 + \beta^3. \quad (13c)$$

oder in dimensionsloser Schreibweise

$$H \beta^{-1} = d \beta^{-1} + \frac{\beta^3}{d^2} = \beta^{1/2} d^{-1/2} (\beta^{3/2} d^{-3/2} + \beta^{-3/2} d^{3/2}) \quad (16).$$

Führt man wieder hyperbolische Funktionen

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (\beta^{-3/2} d^{3/2} + \beta^{3/2} d^{-3/2}) \quad (17)$$

ein, so ergibt sich

$$H \beta^{-1} = 2 e^{-\varphi/3} \cos \varphi. \quad (16b)$$

Trägt man dies in logarithmischen Maßstab auf, erhält man die im Bild 5 dargestellte Kurve, die für $\varphi = \frac{1}{3}$ ein Minimum hat.

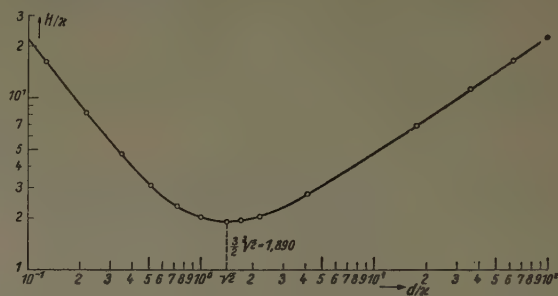


Bild 5

Für die Gl. (13 c) dritten Grades gibt es drei reelle Wurzeln, von denen eine negativ ist. Den beiden positiven Wurzeln entsprechen deshalb bei gleicher Wasserführung Q und gleichem H zwei verschiedene Tiefen d_1 und d_2 und diesem wiederum zwei verschiedene Geschwindigkeiten v_1 und v_2 . Trägt man H/β wie in Bild 5 angegeben als Funktion von d/β auf, ergibt sich für $d/\beta = \sqrt[3]{2}$ ein Minimum von $H/\beta = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} = 1,890$.

Die „Grenztiefe“ d_{gr} wird demnach

$$d_{gr} = \beta \sqrt[3]{2} = \sqrt{\frac{Q^2}{g b_0^3}}. \quad (18)$$

und für die Grenzgeschwindigkeit (Grenze zwischen „Schießen“ und „Strömen“),

$$v_{gr} = \sqrt{g d_{gr}} = \sqrt[3]{\frac{g Q}{b_0}}. \quad (14b).$$

Diese ist bekanntlich gerade gleich der Geschwindigkeit der Grundwelle im seichten Wasser eines Kanals. Da nun beim Schießen $v > v_{gr}$, können sich die Störungen des Wasserabflusses (etwa durch einen Aufstau oder ähnliches) bei dieser Fließart nicht stromaufwärts fortpflanzen, wohl aber beim Strömen, bei welchem $v < v_{gr}$ ist.

Führt man noch für β den Wert $d_{gr}/\sqrt[3]{2}$ ein und trägt diesen in H/β ein, so wird

$$H_{gr} = H_{min} = \frac{3}{2} d_{gr}. \quad (16c),$$

d. h. das Minimum der Energielinienhöhe H beträgt das Anderthalbfache der Grenztiefe.

5. Zusammenfassung

An Hand einfacher Beispiele aus der Dynamik und Hydrodynamik wird gezeigt, wie es durch Einführung von Exponentialfunktionen und hyperbolischen Funktionen gelingt, eine einfache und einheitliche Darstellung anscheinend sehr verschiedener Probleme zu erreichen.

Literatur

- [1] R. Becker, Vorstufe zur Theoretischen Physik, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1949, S. 55.
- [2] L. Prandtl, Führer durch die Strömungslehre, 4. Aufl., S. 85, Braunschweig 1956.
- [3] A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik, Bd. II, Mechanik deformierbarer Medien, Wiesbaden 1948 S. 180.
- [4] W. Kaufmann, Angewandte Hydrodynamik, Bd. II, Berlin 1934, S. 120.

Trondheim

R. Gran Olsson.

Über die Iteration der Potenzreihen

Bildet man die Iterationen auch verhältnismäßig einfacher Funktionen, wie z. B.:

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c,$$

oder

$$\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so werden die entstandenen Formeln immer mehr unübersichtlicher und verwickelter. Das Ausrechnen der Iterationen höheren Grades stößt auf immer größere und oft unüberwindliche Schwierigkeiten. Man kennt bisher keine Regel oder Formel, welche die Rechnung erleichtern würde. Das Ziel dieser Abhandlung ist einerseits die Regelmäßigkeiten der Iterationsbildung zu bestimmen, andererseits eine auch für praktische Zwecke anwendbare Formel zu erhalten.

1. Die Iterationsgruppe der Funktionen

Wie bekannt, kann man aus gegebenen Funktionen, $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$, mittels der Iteration neue Funktionen, $\varphi_1[\varphi_2(x)]$ und $\varphi_2[\varphi_1(x)]$, bilden. Alle jene Gruppen, deren Elemente Funktionen sind und bei welchen die Gruppenoperation die Iteration ist, nennt man Iterationsgruppen.

Für jede Iterationsgruppe ist das Einheitsselement die Funktion

$$\varphi_0(x) \equiv x$$

und man betrachtet als Reziproke eines beliebigen Elementes $\varphi(x)$ ihre inverse Funktion: $\bar{\varphi}(x)$. Es ist einleuchtend, daß

$$\bar{\varphi} \varphi(x) = \varphi \bar{\varphi}(x) = x.$$

Da im allgemeinen

$$\varphi_1 \varphi_2(x) \neq \varphi_2 \varphi_1(x),$$

sind die Iterationsgruppen meist nicht kommutativ. Die einfachsten kommutativen Iterationsgruppen sind die Gruppen mit den allgemeinen Gliedern:

$$l(x) = x + \mu \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$L(x) = \varepsilon x \quad \dots \dots \dots (2)$$

wo μ und ε numerische Konstanten bedeuten. Die Konstante bildet beim ersten das allgemeine Glied der additiven Gruppe der (komplexen) Zahlen, beim zweiten das der multiplikativen Gruppe der (komplexen) Zahlen.

Die Ähnlichkeitstransformation spielt auch bei den Iterationsgruppen eine grundlegende Rolle. Im folgenden wendet man einerseits die Tatsache an, daß die mittels der Ähnlichkeitstransformation entstandene neuere Gruppe mit der ursprünglichen isomorph ist, also kommutativ bleibt, wofern auch die ursprüngliche kommutativ war. Andererseits kann man mit der mittels einer Funktion (1) ausgeführten Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß unsere Funktion konstanterfrei sein kann.

Es bedeute $f(x)$ eine iterierbare, sonst beliebige Funktion. Die mittels dieser gebildete Ähnlichkeitstransformation der unter (2) definierten Gruppe liefert die mit der Definition

$$\psi(x) = f(\varepsilon \bar{f}(x)) \quad \dots \dots \dots (3)$$

bestimmte Gruppe. Die Glieder dieser Gruppe sind natürlich vertauschbar: Es seien

$$\psi_1(x) = f(\varepsilon_1 \bar{f}(x)),$$

und

$$\psi_2(x) = f(\varepsilon_2 \bar{f}(x)),$$

dann ist

$$\psi_1 \psi_2(x) = \psi_2 \psi_1(x) = f(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \bar{f}(x)) \quad \dots \dots (4)$$

und man kann auch sofort die beliebige Iteration m -ten Grades einfach dadurch bilden, daß man in (3) ε^m statt ε setzt:

$$\psi^m(x) = f(\varepsilon^m \bar{f}(x)) \quad \dots \dots \dots (5).$$

Dies ist ein wichtiges Ergebnis, auch deswegen, weil durch (5) der Iterationsgrad für dieselben Zahlen erklärt ist, wie für die für welche es der Potenzexponent ist, also nicht nur für die natürlichen Zahlen, sondern auch für alle komplexen Zahlen. Sogar mehr, als das: die Iteration ist eine soviel wertige Operation, wie es das Potenzieren ist.

Man nennt additive Konstanten nicht enthaltende Funktionen reine Funktionen. Diese haben bei $x = 0$ eine Nullstelle. Ist $\varphi(x)$ keine reine Funktion, die Gleichung

$$\varphi(x) - x = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

aber lösbar, so kann man aus $\varphi(x)$ mittels folgendem Verfahren reine Funktion erhalten. Es bezeichne μ eine Wurzel der Gleichung (6):

$$\varphi(\mu) - \mu = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

Man bildet mit der Funktion $l(x) = x + \mu$ die Ähnlichkeitstransformation von $\varphi(x)$:

$$\chi(x) = \bar{l} \varphi l(x) = \varphi(x + \mu) - \mu \quad \dots \dots (8).$$

Die erhaltene Funktion, $\chi(x)$, ist schon eine reine Funktion, da sie wegen (7) die Nullstelle $x = 0$ hat. Es folgt aus (8):

$$\varphi(x) = l \chi \bar{l}(x), \quad \dots \dots \dots (9)$$

und

$$\varphi^m(x) = l \chi^m \bar{l}(x), \quad \dots \dots \dots (10)$$

also man erhält die Iteration beliebigen Grades der Funktion $\varphi(x)$ einfach dadurch, daß man die Iteration desselben Grades der Funktion $\chi(x)$ zurücktransformiert.

Funktionen mittels einer Transformation (8) auf eine reine Form bringen, die Iteration in dieser reinen Form ausführen, und endlich nach (10) zurücktransformieren: All dies hat praktische Gründe. Es ist nämlich wesentlich einfacher, eine reine Funktion zu iterieren, als eine solche, die noch einen additiven Konstanten enthält. Wir werden daher die Bildungsregel der Iteration m -ten Grades nur für die reinen Funktionen bestimmen, und wir wollen uns bei Anwendung dieser Regel auf diese beschränken.

Ist $f(x)$ eine reine Funktion, dann ist ihre Inverse auch eine solche, und dieselbe Eigenschaft hat auch die aus ihnen gebildete Funktion $\psi(x)$ (3). Gelingt es aus einer gegebenen Funktion, $\varphi(x)$, eine reine Funktion, $\chi(x)$ zu erzeugen, und diese $\chi(x)$ mit einer der unter (3) konstruierten Funktion zu identifizieren, dann hat man die Aufgabe, das Iterieren mechanisch auszuführen, schon im wesentlichen gelöst, da die Regel der Iterationsbildung von $\psi(x)$ einfach durch die Formel (5) ausgedrückt wird.

2 Die Reihenentwicklung der Funktion

$$\psi(x) = f(\varepsilon \bar{f}(x))$$

Das im vorigen Abschnitt erwähnte Identifizieren der Funktionen $\psi(x)$ und $\chi(x)$ werden wir nicht für Funktionen beliebiger Gestalt, sondern nur für Potenzreihen mit positiven Exponenten ausführen. Dem entsprechend kann man einerseits schreiben:

$$\chi(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots \dots (11)$$

andererseits kann man aber — ohne Verminderung der Allgemeinheit — $f(x)$ in folgender Form suchen:

$$f(x) = x - c_1 x^2 - c_2 x^3 - c_3 x^4 - \dots,$$

bzw.

$$f(x) = x - \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} \cdot x^{\nu+1} \dots (12).$$

Man hat die Aufgabe, die Koeffizienten der Reihenentwicklung der Funktion $f(\varepsilon \bar{f}(x))$ zu bestimmen; wird man damit fertig, dann ist das Identifizieren von $\psi(x)$ und $\chi(x)$ durch das Gleichmachen der entsprechenden Koeffizienten schon leicht ausführbar.

Zur Bestimmung der Koeffizienten der Reihenentwicklung der Funktion $\psi(x) = f(\varepsilon \bar{f}(x))$ muß man die Ergebnisse einer anderen — gegenwärtig noch im Erscheinen begriffenen Abhandlung des Verfassers als Hilfssätze benutzen, welche wir hier ohne Beweis in fertiger Form bringen. Es gilt der Satz: Wenn die Potenzreihe der Funktion $g(x)$ die Form

$$g(x) = x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4 + \dots (13)$$

hat, dann lautet die explizite Form ihrer inversen Funktion $\bar{g}(x)$:

$$\bar{g}(x) = x - b_1 x^2 + (2b_1^2 - b_2) x^3 - (5b_1^3 - 5b_1 b_2 + b_3) x^4 + \dots,$$

oder im allgemeinen:

$$\bar{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i_0} (-1)^{n-i_0} \cdot \frac{(2n-i_0)!}{(n+1)! \prod_{k=1}^n i_k!} \cdot \prod_{k=1}^n b_k^{i_k} \right] \cdot x^{n+1} \quad (14),$$

wo

$$i_0 = n - \sum_{k=1}^n i_k \dots (15),$$

und wo das Summieren unter Berücksichtigung der Beschränkung

$$\sum_{k=1}^n k i_k = n \dots (16)$$

auf alle möglichen Fälle ausgedehnt werden muß. Die Exponenten i_k sind natürlich nichtnegative ganze Zahlen.

Wir benötigen auch die explizite Reihe der ν -ten Potenz der Funktion $\bar{g}(x)$; diese liefert uns folgende Form:

$$\bar{g}(x)^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\nu \cdot \sum_{i_0} (-1)^{n-i_0} \cdot \frac{(2n+\nu-i_0-1)!}{(n+\nu)! \prod_{k=1}^n i_k!} \cdot \prod_{k=1}^n b_k^{i_k} \right] \cdot x^{n+\nu} \quad (17),$$

gleichfalls mit den bei (14) erwähnten Nebenbedingungen.

Mit Anwendung der Formel (17) kann man jetzt die Reihe der Funktion $\bar{f}(x)^{\nu+1}$ bilden:

$$\bar{f}(x)^{\nu+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\nu+1) \cdot \sum_{i_0} \frac{(2n+\nu-i_0)!}{(n+\nu+1)! \prod_{k=1}^n i_k!} \cdot \prod_{k=1}^n c_k^{i_k} \right] \cdot x^{n+\nu+1}$$

Man setze überall $(n-\nu)$ statt n :

$$\bar{f}(x)^{\nu+1} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \left[(\nu+1) \cdot \sum_{i_0} \frac{(2n-\nu-i_0)!}{(n+1)! \prod_{k=1}^{n-\nu} i_k!} \cdot \prod_{k=1}^{n-\nu} c_k^{i_k} \right] \cdot x^{n+1} \quad (18).$$

Bei (18) müssen nicht mehr die Nebenbedingungen (15) und (16), sondern die Nebenbedingungen:

$$i'_0 = n - \nu - \sum_{k=1}^{n-\nu} i'_k, \dots (19),$$

und

$$\sum_{k=1}^{n-\nu} k i'_k = n - \nu \dots (20)$$

beachtet werden. Mit Rücksicht auf das Bestehen von (15) und (16) bilden folgende Werte eine Lösung des Gleichungssystems (19) und (20):

$$\left. \begin{aligned} i'_0 &= i_0 + 1 - \nu \\ i'_k &= i_k, \text{ wenn } k \neq 0 \text{ oder } k \neq \nu \\ i'_\nu &= i_\nu - 1 \end{aligned} \right\} \dots (21).$$

Infolge von (21) kann man (18) umformen:

$$\bar{f}(x)^{\nu+1} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \left[\sum_{i_0} i_\nu (\nu+1) \cdot \frac{(2n-i_0-1)!}{(n+1)! \prod_{k=1}^{n-\nu} i_k!} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n-\nu} c_k^{i_k}}{c_\nu} \right] \cdot x^{n+1},$$

oder

$$c_\nu \cdot \bar{f}(x)^{\nu+1} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \left[\sum_{i_0} i_\nu \cdot (\nu+1) \cdot \frac{(2n-i_0-1)!}{(n+1)! \prod_{k=1}^{n-\nu} i_k!} \cdot \prod_{k=1}^{n-\nu} c_k^{i_k} \right] \cdot x^{n+1} \dots (22).$$

Nimmt man zu (22) auch noch die aus (14) folgende Reihenentwicklung:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i_0} \frac{(2n-i_0)!}{(n+1)! \prod_{k=1}^n i_k!} \cdot \prod_{k=1}^n c_k^{i_k} \right] \cdot x^{n+1},$$

wird die explizite Reihe der Funktion $\bar{f}(\varepsilon \bar{f}(x))$ sofort ohne größere Schwierigkeiten erhalten:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= f(\varepsilon \bar{f}(x)) = \varepsilon \bar{f}(x) - \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} \cdot \varepsilon^{\nu+1} \bar{f}(x)^{\nu+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon \sum_{i_0} \frac{(2n-i_0)!}{(n+1)! \prod_{k=1}^n i_k!} \cdot \prod_{k=1}^n c_k^{i_k} \right] \cdot x^{n+1} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{i_0} \varepsilon^{\nu+1} \cdot i_\nu \cdot (\nu+1) \right) \cdot \frac{(2n-i_0-1)!}{(n+1)! \prod_{k=1}^n i_k!} \cdot \prod_{k=1}^n c_k^{i_k} \right] \cdot x^{n+1}. \end{aligned}$$

Man kann zusammenziehen. Mit Rücksicht, daß

$$\begin{aligned} (2n-i_0)! &= (2n-i_0-1)! (2n-i_0) \\ &= (2n-i_0-1)! \sum_{\nu=1}^n i_\nu (\nu+1), \end{aligned}$$

ist, wird unser letztes Resultat:

$$f(\varepsilon \tilde{f}(x)) = \varepsilon x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{v=1}^n \frac{(2n-i_0-1)!}{(n+1)!} \frac{\sum_{k=1}^n (\varepsilon - \varepsilon^{v+1}) \cdot i_v \cdot (v+1)}{\prod_{k=1}^n i_k!} \times \prod_{k=1}^n c_k^{i_k} \right] \cdot x^{n+1} \quad (23),$$

wo innerhalb der eckigen Klammer beim Summieren die Bedingungen (15) und (16) maßgebend sind.

Das Ausführen der Iteration, bzw. das Bestimmen der Koeffizienten der m -ten Iterierten, geschieht jetzt schon durch das Identifizieren der Funktionen $\chi(x)$ und $f(\varepsilon f(x))$, weiter der Funktionen $\chi^m(x)$ und $f(\varepsilon^m \tilde{f}(x))$. Es bestehen also einerseits:

$$a_0 = \varepsilon, \quad a_n = \sum_{v=1}^n \frac{(2n-i_0-1)!}{(n+1)!} \frac{\sum_{k=1}^n (\varepsilon - \varepsilon^{v+1}) \cdot i_v \cdot (v+1)}{\prod_{k=1}^n i_k!} \times \prod_{k=1}^n c_k^{i_k}, \quad (n > 0) \quad (24)$$

andererseits, wofern man die Koeffizienten der Funktion $\chi(x)$ mit A_n bezeichnet:

$$\chi^m(x) = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4 + \dots \quad (25).$$

auch die folgenden Identifizierungen:

$$A_0 = \varepsilon^m, \quad A_n = \sum_{v=1}^n \frac{(2n-i_0-1)!}{(n+1)!} \frac{\sum_{k=1}^n (\varepsilon^m - \varepsilon^{m(v+1)}) \cdot i_v \cdot (v+1)}{\prod_{k=1}^n i_k!} \times \prod_{k=1}^n c_k^{i_k}, \quad (n > 0) \quad (26).$$

Das inverse Gleichungssystem des Gleichungssystems (24) liefert die Koeffizienten c_k , ausgedrückt als Funktionen der Koeffizienten a_n ; durch das Ersetzen dieser c_k (26) erhält man die Koeffizienten A_n selbst als Ausdrücke der Koeffizienten a_n . Insofern die ursprünglich zu iterierende Funktion keine reine Funktion war, muß man die so erhaltene $\chi^m(x)$ noch nach (10) transformieren.

Wir müssen noch bemerken, daß die hier skizzierte Iterationsmethode für Zwecke praktischer Berechnungen nur dann anwendbar ist, wenn

1. die zu iterierende Funktion schon ursprünglich rein ist oder leicht auf reine Form gebracht werden kann, und ferner

2. wenn der in (11) vorkommende Koeffizient $a_0 = \varepsilon$ weder Null, noch eine Einheitswurzel ist.

Budapest.

A. Zajta.

BUCHBESPRECHUNGEN

G. K. Batchelor and **R. M. Davies**, *Surveys in Mechanics. A Collection of Surveys of the present position of Research in some branches of Mechanics, written in Commemoration of the 70th Birthday of Geoffrey Ingram Taylor.* VIII + 475 S. m. zahlreichen Abb. Cambridge 1956. University Press. Preis geb. 50,— s.

In diesem Jahr konnte ein Großer im Reiche der Mechanik seinen 70. Geburtstag begehen: Sir Geoffrey Taylor. Als Gratulationsgabe und zugleich zur Ehrung des Werkes dieses international führenden Gelehrten haben seine engeren Freunde und Schüler der Fachwelt eine Sammlung von Monographien über solche Sondergebiete beschert, die der Jubilär im Laufe seiner so vielseitigen wissenschaftlichen Betätigung durch eigene Ideen und Untersuchungen bereichert hat. Dabei haben die beiden Herausgeber zunächst die zu behandelnden Themen ausgewählt und hierfür dann sachkundige Bearbeiter herangezogen, wobei man sich allerdings ausschließlich auf Angehörige des angelsächsischen Sprachgebietes beschränkt hat. So behandeln nach einem kurzen biographischen Überblick von R. V. Southwell dann R. Hill quasistatische plastische Verformungen in Metallen; N. F. Mott Verschiebungen in Kristallen; R. M. Davies Druckwellen in festen Körpern; H. B. Squire rotierende Flüssigkeiten; W. R. Lane und H. L. Green die Mechanik von Tropfen und Blasen; F. Ursell die Wellenbildung durch Wind; M. J. Lighthill Zähigkeitseffekte bei Schallwellen endlicher Amplitude; G. K. Batchelor und A. A. Townsend turbulente Diffusion; T. H. Ellison atmosphärische Turbulenz und schließlich; K. S. M. Davidson die Mechanik von Segelschiffen und Jachten.

Mit diesem Geburtstagsband ist zweifellos auch allen Fachgenossen ein sehr wertvolles Geschenk zuteil geworden; manch einer von ihnen wird aus diesen zusammenfassenden Darstellungen in modernster Be-

leuchtung, unter Berücksichtigung des jüngsten einschlägigen Schrifttums, zur Orientierung wie für eigene Arbeiten großen Nutzen ziehen.

Göttingen.

M. Schäfer.

C. Carathéodory (weil. Prof. a. d. Universität München), *Maß und Integral und ihre Algebraisierung.* (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 10.) Herausgegeben von Finsler, Rosenthal und Steuerwald. 337 S. m. 12 Fig. Basel/Stuttgart 1956. Birkhäuser Verlag. Preis brosch. 34,30 SFr, (34,30 DM) geb. 38,50 SFr (38,50 DM).

Das vorliegende Buch, dessen Erscheinen der Autor nicht mehr erleben konnte, führt ein Programm durch, das Carathéodory bereits vor fast zwanzig Jahren entworfen hat. Ausgehend vom Begriff der Booleschen Algebra, wobei ein Axiomensystem von M. H. Stone herangezogen wird, entwickelt das Buch in den ersten sechs Kapiteln (Die Somen, Mengen von Somen, Die Ortsfunktionen, Das Rechnen mit Ortsfunktionen, Die Maßfunktionen, Das Integral) einen sehr allgemeinen Integralbegriff, der im siebenten Kapitel auf gewisse Grenzprozesse angewandt wird. Die Analoga bekannter Sätze (Egoroff, Lebesgue, Fatou, Riesz-Fischer) werden von dem hier eingenommenen Standpunkt aus abgeleitet. Ein Ausblick in die Ergodentheorie (Hauptungleichung und Hauptsatz der Ergodentheorie) beschließt das Kapitel. Kap. 8 befaßt sich mit der Berechnung von Maßfunktionen und endet mit einer interessanten Anwendung auf die Borelschen Mengen eines euklidischen Raumes. Die Kapitel 9 und 10 beschäftigen sich eingehend mit den regulären Maßfunktionen (äußeren Maßen). Kap. 11 ist den Inhaltsfunktionen (im Sinne von H. Hahn) gewidmet und geht u. a. auf den Jessenschen Torusraum ein. Man findet hier auch den Vitalischen Überdeckungssatz und ver-

schiedene Angaben über das Lebesguesche Integral. In einem Anhang wird ein weiteres Axiomensystem für die Elemente einer Booleschen Algebra besprochen. Am Schluß des interessanten und gut lesbaren Buches befindet sich ein ausführliches Namen- und Sachregister.

Dresden.

M. Landsberg.

H.-H. Ostmann, Additive Zahlentheorie. 2. Teil, Spezielle Zahlenmengen. (Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 11.) VI + 136 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956. Springer-Verlag. Preis brosch. 22,— DM.

Im Vordergrund steht der Dichte-Begriff, für den zunächst einige Relationen abgeleitet werden. An konkreten zahlentheoretischen Problemen dürften vor allem diejenigen von Goldbach, Waring und Fermat interessieren. Sie finden eine ausführliche Darstellung. — Auch dem zweiten Bande ist ein reichhaltiges Literaturverzeichnis sowie ein gut orientierendes Sachregister beigegeben.

Das Gesamtwerk ist — der Sammlung, in der es erscheint, gemäß — ein Bericht und kein Lehrbuch. Deshalb sei noch einmal auf die grundsätzliche Bemerkung in der Besprechung des ersten Teiles zurückgekommen: Die Brauchbarkeit derartiger Berichte wäre erheblich größer, wenn in ihnen die problemgeschichtliche Seite der Darstellung stärker betont würde. In der vorliegenden Form vermag sie nur der jeweilige Spezialist voll auszuschöpfen. Die stürmische Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrzehnten kann zu einer Krise des mathematischen Verständnisses führen, wenn nämlich die sehr abstrakten modernen Begriffe nur noch formal aufgenommen werden und in ihnen nicht mehr der notwendige theoretische Schlußpunkt einer reichen lebendigen Entwicklung erkannt wird. Tieferes mathematisches Verständnis hat Einsicht in die Genesis der Begriffe mit zur Voraussetzung. Die Realisierung der daraus resultierenden Forderungen ist heute dringend geworden.

Diese Bemerkung ist nicht als abwertende Kritik des sehr gründlichen Werkes von Ostmann gemeint, das sich in der üblichen Form eines Ergebnisberichtes anbietet. Sie hat vielmehr den Sinn einer Frage nach zweckmäßiger Gestaltung.

Potsdam.

M. Draeger.

Wilhelm Specht (o. Prof. a. d. Univ. Erlangen), Gruppentheorie. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. LXXXII.) VII + 457 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956. Springer-Verlag. Preis geh. 66,— DM, geb. 69,60 DM.

Das hervorragend geschriebene Buch vermittelt dem Leser einen weitreichenden Einblick in die allgemeine Gruppentheorie. Die große Sachkenntnis des Verfassers ergab eine äußerst geschickte Auswahl aus dem umfangreichen Gebiet. Das Buch gliedert sich in 3 Teile (Einführung, Freie und direkte Zerlegung, Allgemeine Strukturtheorie) von ungefähr gleichem Umfang. In der Einführung werden eingehend die Untergruppen einer Gruppe betrachtet, die Begriffe Homomorphie und Isomorphie werden ausführlich erörtert, ein Kapitel über Gruppen mit Operatoren bildet den Schluß des ersten Teils. Der zweite Teil beginnt mit einem Kapitel über die freien Gruppen, das u. a. Sätze von W. v. Dyck, H. Tietze und R. Baer enthält. Im Zusammenhang mit den Relationensystemen einer Gruppe wird hier auch auf das Identitätsproblem und auf das Isomorphieproblem hingewiesen. Im nächsten Kapitel, das die freien Zerlegungen von Gruppen behandelt, findet man den Verfeinerungssatz von R. Baer-F. Levi, dessen Beweis sich auf den Untergruppensatz von A. Kurosch stützt. Betrachtungen über die direkten Zerlegungen von Gruppen schließen sich an, wobei insbesondere

gewisse Verfeinerungssätze eingehend behandelt werden. Ein Streifzug durch die Theorie der Abelschen Gruppen beschließt den mittleren Teil des Buches. Der dritte Teil enthält Abschnitte über Normalfolgen von Untergruppen einer Gruppe (Verfeinerungssatz von O. Schreier, Satz von C. Jordan-O. Hölder) und geht auf p -Gruppen (Sätze von W. Burnside) und auf Erweiterungen von Gruppen (Einbettungssatz von R. Baer) ein. 11 Seiten Bemerkungen und Hinweise, ein Namenverzeichnis und ein ausführliches Sachverzeichnis bilden den Schluß des Buches, daß jedem an der Gruppentheorie Interessierten auf das wärmste empfohlen werden kann.

Dresden.

M. Landsberg.

Dr. R. Blunck, Maßsystem, Naturkonstanten und Grenzen des Physikalischen Universums. 100 S. m. 6 Abb. u. 7 Tabellen. Bad Nauheim 1956. Lempius-Verlag. Preis kart. 8,80 DM.

Der Verfasser entwickelt sein Maßsystem im Hinblick auf eine möglichst übersichtliche Darstellung der Physik in ihren Grundzügen, wobei er zum Vorteil des Buches auf eine Auseinandersetzung mit den vorhandenen Ansichten über die Maßsystemfrage verzichtet.

Ausgehend von den 3 Grundgrößen Kraft, Länge und Zeit gewinnt er aus 3 Grundversuchen vom Coulomb-schen Typus die 3 Naturkonstanten 4π , die Lichtgeschwindigkeit und eine mit dem Gravitationspotential zusammenhängende Konstante. Mit diesem Material errichtet er den Formelapparat der Elektrik und Mechanik einschließlich relativistischer Aussagen und knüpft kosmologische Betrachtungen an. Hier, wie auch in den folgenden Abschnitten über Mikrophysik findet man viele neuartige und in ihrer Anschaulichkeit überraschende Gedankengänge. Tabellen mit Umrechnungen ermöglichen den Vergleich mit Formeln gewohnter Schreibweise.

Physiker und Ingenieure der Praxis freilich werden kaum den Gewinn einer weiten Übersicht als genügende Rechtfertigung für den Verzicht auf gewohnte Begriffe ansehen. Dem Physiker-Nachwuchs hingegen und besonders auch dem Nichtphysiker wird dieser Überblick wertvoll sein, und sie werden darum auch bereit sein, in dem zugrundegelegten Maßsystem zu denken.

Dresden.

H. Zimmer.

E. Becker, Beitrag zur Berechnung von Sekundärströmungen. (Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Nr. 13.) 85 S. m. 36 Abb. Göttingen 1956. Selbstverlag Max-Planck-Institut für Strömungsforschung. Preis brosch. 8,— DM.

Die bisher durchgeführten Berechnungen der Grenzschichten beschränken sich in weit überwiegender Zahl auf zweidimensionale Grenzschichten. In der Praxis spielen jedoch dreidimensionale Fälle eine erhebliche Rolle (Strömungsmaschinen, Aerodynamik). Daher ist es sehr zu begrüßen, daß in der vorliegenden Arbeit ein wichtiger Beitrag für einen speziellen dreidimensionalen Fall geliefert wird. Es handelt sich dabei um Grenzschichten, die an einer ruhenden ebenen Wand entstehen, wenn die Stromlinien außerhalb der Grenzschicht in wandparallelen Ebenen gekrümmt sind. Eine solche Strömung herrscht etwa als ausgebildete „rotationssymmetrische Kanalströmung“ einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Ebenen mit kreisförmig gekrümmten mittleren Stromlinien. Durch die Zentrifugalkräfte auf Grund der Stromlinienkrümmung entstehen hierbei Sekundärströmungen.

Im theoretischen Teil wird zunächst die Laminarströmung mit einer Methode untersucht, die auch Anhaltspunkte für die Berechnung der turbulenten Strömung aufweist — iterative Lösung der Navier-

Stokesschen Gleichungen mit Entwicklung der Geschwindigkeitskomponenten in Potenzreihen nach einem bestimmten Parameter. Während bei Rohren die Sekundärströmung den Widerstand erhöht, tritt hier eine Widerstandsverringern auf, die sich mit Hilfe des Energiesatzes erklären läßt. Die Berechnung der turbulenten Strömung gelingt in ähnlicher Weise mit einer plausiblen Annahme für den turbulenten Austausch. Nachprüfung der Rechnung für die turbulente Strömung in zwei Versuchskanälen lieferte einigermaßen befriedigende Übereinstimmung und damit Bestätigung der zugrunde gelegten Annahme.

Weilburg.

L. Schiller.

Dr. Arthur Czwalina (Oberstudiendirektor i. R.), Die Mechanik des schwimmenden Körpers. 129 S. m. 53 Fig. Leipzig 1956. Akademische Verlagsgesellschaft. Preis geb. 12.— DM.

Das vorliegende Bändchen enthält erstens Untersuchungen der Gleichgewichtslagen verschiedenartiger schwimmender Körper und zweitens Berechnungen der Schwingungszeiten der Pendel- und Tauchschwingungen dieser Körper in den stabilen Gleichgewichtslagen. Es entstand im Anschluß an das Werk „Über schwimmende Körper“ von Archimedes, in dem die Gleichgewichtslagen des Kugel- und Paraboloidsegments auf ihre Stabilität untersucht werden.

Das Buch von Czwalina bringt zunächst die allgemeine Ableitung der benötigten Stabilitätskriterien und Formeln für die Schwingungszeiten, eine Zusammenstellung von Flächen- und Massenträgheitsmomenten und eine Analogie zum Reversionspendel. Weiterhin werden 15 verschiedene geometrische Körper mit homogener Massenverteilung behandelt und in Skizzen und Formeln die Ergebnisse übersichtlich dargestellt. Leider wird keine Anwendung auf ein technisches Problem (Schiffskörper) gegeben.

Dresden.

G. Landgraf.

Carl Ludwig Siegel (o. Prof. a. d. Univ. Göttingen) Vorlesungen über Himmelsmechanik. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. LXXXV). IX + 212 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956. Springer-Verlag. Preis geh. 29,80 DM, geb. 33,— DM.

Das vorliegende Buch des bekannten Mathematikers beschäftigt sich vorwiegend mit dem globalen Verhalten der Lösungen gewisser Differentialgleichungen, die für die Himmelsmechanik von Bedeutung sind. Insbesondere werden Hamiltonsche Systeme und die Bewegungsgleichungen des Dreikörperproblems eingehend untersucht. Das Buch gliedert sich in drei Kapitel (Das Dreikörperproblem, Periodische Lösungen, Das Stabilitätsproblem) von etwa gleichem Umfang. In den einführenden Paragraphen des ersten Kapitels wird die Transformationstheorie der Euler-Lagrangeschen und der Hamiltonschen Gleichungen entwickelt. Der Rest des Kapitels ist dem Dreikörperproblem gewidmet, das ausführlich unter besonderer Berücksichtigung wichtiger Arbeiten von K. F. Sundman dargestellt wird. Die Sundmanschen Überlegungen lassen sich auf das n -Körperproblem für $n > 3$ nicht anwenden, jedoch erörtert das zweite Kapitel Methoden, mit denen man das n -Körperproblem und auch gewisse allgemeinere Problemstellungen der Mechanik angreifen kann. Es handelt sich hierbei insbesondere um die Bestimmung periodischer Lösungen analytischer Differentialgleichungen. Das zweite Kapitel geht auf Untersuchungen von Lagrange, Hill, Moulton u. a. ein und enthält eine ausgezeichnete Darstellung der Poincaréschen Kontinuitätsmethode und des Birkhoffschen Fixpunktsatzes. Das letzte Kapitel behandelt zunächst ausführlich das funktionentheoretische und das Poincarésche

Zentrumproblem. Im Mittelpunkt des dritten Kapitels stehen klassische Sätze von Ljapunov und Dirichlet über die Stabilität und Instabilität von Differentialgleichungen, wie sie in der Himmelsmechanik auftreten, und Untersuchungen von Normalformen Hamiltonscher Systeme. Der letzte Paragraph befaßt sich mit dem sogenannten Poincaréschen Wiederkehrsatz, dessen Beweis für die Ergodentheorie von Bedeutung ist. Ein geschickt ausgewähltes Literaturverzeichnis beschließt das äußerst interessante und anregend geschriebene Buch.

Dresden.

M. Landsberg.

Jenaer Jahrbuch 1955, 2. Teil. Herausgegeben vom VEB Carl Zeiß Jena. VI + S. 149—294 m. 103 Abb. u. 15 Tabellen. Jena 1955. VEB Gustav Fischer Verlag. Preis geb. 14,— DM.

Der verspätet erscheinende 2. Teil des Jenaer Jahrbuches 1955 wird durch einen Gedenkaufsatz für den Anfang dieses Jahres verstorbenen Mitarbeiter des Jenaer Zeiß-Werkes, Professor Dr. Löwe, eingeleitet. Sodann folgen zwei Aufsätze geschichtlichen Inhaltes, die Berichte über frühere Arbeiten des Werkes bringen, und weiter vier wissenschaftliche Berichte über neuere Arbeiten. Den Abschluß bildet eine fehlerkritische Untersuchung über den Einfluß fehlerhafter Stangenlängen und des Lagerzapfenspieles beim Zeichnen von Kreisen mit großem Radius mit dem Peaucellierschen bzw. Hartschen Inversor.

Dresden.

Willers.

L. Hogben, Zahl und Zufall (Eine Einführung in die Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik mit anschaulichen Hilfsmitteln). Übersetzung aus dem Englischen von G. Kirschner. 484 S. m. 84 Abb. München 1956. Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. 58,50 DM.

Von dem zweibändigen Werk Hogbens mit dem Originaltitel: „Chance and choice by cardpack and chessboard“ liegt hier nur der erste Band in deutscher Übersetzung vor. Verf., der als Nicht-Mathematiker für Nicht-Mathematiker schreibt, beabsichtigt dankenswerterweise, — im Gegensatz zu manchen zur Oberflächlichkeit verleitenden statistischen Rezeptbüchern, — dem mathematisch ungeschulten Leser die Grundgedanken der Stochastik und stochastischen Statistik in aller Klarheit und Gründlichkeit darzulegen, u. z. vor allem mit visuell anschaulichen Mitteln. Begriffe und Sätze der Kombinatorik und Stochastik werden fast ausschließlich an Zahlenbeispielen aus der Theorie der Glücksspiele erläutert, die Verf. konsequent mit Hilfe bunter, schematischer Würfel, Spielkarten, Urnen etc. enthaltender Abbildungen darstellt. Dem visuell veranlagten Mediziner mögen diese, sofern er sich ebenso liebevoll in sie vertieft wie Verf. selbst, von Nutzen sein; dem Fachmann bieten sie gewiß manche didaktische Anregung. Grundsätzlich entwickelt Verf. allgemeine Begriffe, Modelle und Sätze sukzessive aus einfachen Spezialfällen; dies gestaltet die Darstellung unübersichtlich und unnötig weitschweifig. Das an sich begrüßenswerte Bestreben, ausgefahrene Wege und gedankenlose Formalistik zu vermeiden, verführt Verf. zum Gebrauch einer viel zu wortreichen Sprache, zahlreicher neuer, aber keineswegs immer deutlicherer Begriffsbezeichnungen und einer Unzahl schwerfälliger in sich nicht widerspruchsfreier, von der bewährten mathematisch-statistischen Symbolik abweichender Symbole. Nur dem erfahrenen Fachmann wird es daher mühelos gelingen, den behandelten Stoff zu identifizieren und in die übliche Fachsprache umzuwandeln; dem Anfänger, an den sich das Werk eigentlich wendet, dürfte es hingegen, wenn er den labyrinthischen Gedankengängen restlos gefolgt ist, den Zugang zur übrigen statistischen Literatur nicht unbedingt erleichtern.

Stofflich bietet dieser Band dem Fachmann kaum Neues; er beschränkt sich auf vorbereitende Kapitel über Differenzen- und Integralrechnung, Kombinatorik (u. a. figurierte Zahlen), Stirling-Formel, Γ - und Betafunktionen; Rechenregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung; Bernoulli-Schema mit und ohne Zurücklegen, mit Poisson- und Normalverteilung als Asymptoten; Beurteilung und Vergleich von Häufigkeiten (ohne Erwähnung des χ^2 -Tests und Fisherschen direkten Tests) bzw. von Mittelwerten (die Ausführungen über den Mittelwertvergleich bei gepaarten Stichproben sind irreführend); Bayessche Regel, die Prinzipien der maximalen Plausibilität, der Hypothesenprüfung und Parameter-Schätzung mittels Konfidenzschluß, die Verf. einer kritischen Analyse unterzieht; Momente, Moment-Erzeugende und Pearson-System; gewöhnliche und Spearman's Rang-Korrelation; Regression, die an einfachen Würfelmodellen erläutert wird, und partielle Korrelation; schließlich Lexis- und Poisson-Schema sowie das Schema der zweifachen Varianzanalyse, wobei stets die voraussetzungslose tautologische Zerlegung der Abweichungsquadratsummen im Vordergrund steht, während die eigentliche Signifikanztest-Methodik Band 2 vorbehalten bleibt.

Das Werk ist offenbar von einem Liebhaber für Liebhaber geschrieben und hat als solches zweifellos Verdienste; vieles, was in anderen elementaren Büchern (jedoch nicht in ernst zu nehmenden Lehrbüchern) übersehen oder verschwiegen wird, versucht Verf. hier anschaulich zu begründen und zu erklären. Zieht man jedoch das Mißverhältnis zwischen luxuriösem Aufwand an Geld, Zeit und gedanklicher Weitschweifigkeit einerseits und möglichem Erfolg andererseits in Betracht, so fragt man sich unwillkürlich, ob nicht auch der Nicht-Mathematiker Zeit und Mühe besser auf das Studium zuverlässigerer und rentablerer Lehrbücher verwenden sollte.

Dies gilt schon für das zweibändige Original, in noch viel höherem Maße aber für die vorliegende deutsche Übersetzung des ersten Bandes, die durch mangelnde Fachkenntnis, sinnlose und sinnwidrige Übertragung wichtiger Textabschnitte, verkehrte Anwendung und falsche Bildung von Fachausdrücken die guten Absichten des Verf. stark beeinträchtigt.

Bad Nauheim.

M. P. Geppert.

A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Band 22). XI + 271 S. Basel/Stuttgart. 1956. Birkhäuser Verlag. Preis geb. 26,— Sfr./DM.

Die vorliegende 4. Auflage dieses bekannten und bewährten Buches unterscheidet sich von der 3. Auflage im wesentlichen nur durch einen kürzeren Anhang, in dem der Verfasser die Herstellung von Gruppenbildern erörtert.

Dresden.

M. Hassé.

K. Sielaff, Einführung in die Theorie der Gruppen. (Schriftenreihe zur Mathematik, Heft 4) IV + 82 S. Frankfurt am Main/Hamburg 1956. Verlag Otto Salle. Preis geh. 5,80 DM.

Das vorliegende Buch will „die in ihrer Schönheit so eindrucksvolle Gruppentheorie allen an der mathematischen Wissenschaft interessierten Lesern nahebringen“. Dieses Buch hätte der Verfasser kaum geschickter durchführen können. Die Darstellung ist didaktisch hervorragend und mathematisch bis in die letzte Einzelheit sorgfältig.

Neben den beiden ersten Teilen des Buches, in denen die Grundlagen der Gruppentheorie bis zum Begriff des Normalteilers und der Faktorgruppe entwickelt werden, ist besonders der dritte Teil hervorzuheben. Hier werden Strukturuntersuchungen von speziellen Bewegungsgruppen (zyklische Gruppen, Dieder- und

Polyedergruppen) durchgeführt und mit Hilfe von Gruppengraphen dargestellt. Dieses Buch kann jedem, der einen ersten Einblick in die Gruppentheorie gewinnen will, wärmstens empfohlen werden.

Dresden.

M. Hasse.

Dr. F. Ringleb, Mathematische Formelsammlung. (Sammlung Götschen, Bd. 51/51 a) 6. erweiterte Aufl. 278 S. m. 37 Fig. Berlin 1956. Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 4,80 DM.

Die bekannte Formelsammlung liegt jetzt in teilweise neubearbeiteter 6. Auflage vor. Insbesondere sind die letzten Seiten des Abschnittes über gewöhnliche und der über partielle Differentialgleichungen umgearbeitet bzw. erweitert worden. Der Umfang des Bandes ist dadurch um vier Seiten angewachsen. Auch die neue Ausgabe wird viel benutzt werden.

Dresden.

Willers.

Dr. M. Miller (Prof. a. d. Hochschule für Verkehrswesen, Dresden), Analytische Geometrie des Raumes. (Sammlung Crantz). 91 S. m. 18 Abb. Leipzig 1956. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis kart. 3,40 DM.

Die vorliegende elementare Einführung in die Analytische Geometrie des Raumes setzt im wesentlichen nur die Kenntnis der einfachsten Sätze der ebenen analytischen Geometrie voraus. Sie macht weder von Vektoren noch von Determinanten Gebrauch, sie ist nicht nur für die Benutzung in Volkshochschulen, sondern auch für den Selbstunterricht gedacht und gibt daher am Ende jedes Abschnittes eine größere Zahl von Aufgaben mit ausführlichen Lösungen.

Dresden.

Willers.

W. Blaschke, Kreis und Kugel. 2., durchgesehene und verbesserte Auflage. VIII + 167 S. Berlin 1956. Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 18,60 DM.

Das isoperimetrische Problem hat seit dem klassischen Altertum das Interesse der bedeutendsten Mathematiker gefunden. Blaschkes Büchlein, vor 40 Jahren erstmalig erschienen und jetzt durch Literaturhinweise ergänzt neu herausgegeben, bringt Beweise der isoperimetrischen Eigenschaften von Kreis und Kugel, die sich an die rein geometrischen Ansätze Steiners anschließen und ohne höhere analytische Hilfsmittel auskommen. Als naturgemäße Weiterführung der Ideen schließen sich Betrachtungen über konvexe Körper an, die die Entwicklung auf diesem Gebiet entscheidend gefördert haben. Wenn auch in den letzten Jahrzehnten eine umfangreiche Literatur auf diesem Gebiet entstand, so rechtfertigt sich die Neuauflage allein schon durch die fesselnde Darstellung des Stoffes, die jeden anspricht, der Freude an geometrisch-anschaulichen Problemen hat.

Dresden.

H. L. Burmeister.

Prof. Dr. A. Walther und Dipl.-Math. W. Hoffmann, Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung. (Nachrichtentechnische Fachberichte, Bd. 4, 1956.) VIII + 229 S. mit 182 Abb. Braunschweig 1956. Verlag Friedrich Vieweg & Sohn. Preis kart. 26,— DM.

Das vorliegende Heft bringt Referate der Vorträge, die auf der vom 25.—27. Oktober 1955 gemeinsam von der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik und der Nachrichtentechnischen Gesellschaft an der Technischen Hochschule Darmstadt veranstalteten Tagung gehalten wurden. Die Tagung, die den Zweck hatte, einen möglichst großen Kreis über Entwicklung und Anwendung der elektronischen Rechenautomaten und der Informationsverarbeitung in den verschiedenen Ländern zu unterrichten, war von über 500 Teilnehmern aus 15 Ländern besucht. Die Hauptvorträge wurden von Goldstine (Princeton), Piloty (Mün-

chen), Billing (Göttingen), Booth (London), Householder (Oak Ridge), Rutishauser (Zürich) und Aiken (Cambridge, Mass.) gehalten. Weiter wurden in 20 Vorträgen die Rechenautomatenentwicklung, in 10 die Bauelemente, Schaltkreise und Speichertechnik, in 11 das Programmieren, in 12 numerische Mathematik und in 4 spezielle Fragen und abstrakte Schalttheorie behandelt. Zum ersten Mal berichteten auf dieser Tagung russische Teilnehmer über die Entwicklung in der UdSSR. Das Heft gibt einen ausgezeichneten Überblick über den augenblicklichen Stand der Entwicklung.

Dresden.

Willers.

Proceedings of the first Congress on Theoretical and Applied Mechanics. VIII + 285 S. m. Abb. Kharagpur 1956. Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics, Indian Institute of Technology. Preis geh. 20,— DM.

Am 1. und 2. November 1955 fand der erste indische Kongreß für theoretische und angewandte Mechanik in Kharagpur statt. Der vorliegende Band enthält 28 englische geschriebene ausführliche Referate dort gehaltener Vorträge. Sie behandeln Themen aus dem Gebiet der Elastizitäts-, der Plastizitätstheorie und der Rheologie, ferner der Strömungslehre, der statistischen Mechanik, der Thermodynamik und der mathematischen Physik.

Dresden.

Willers.

Colloque sur l'Analyse Statistique. Tenu à Bruxelles les 15, 16 et 17 décembre 1954. Herausgegeben vom Centre Belge de Recherches Mathématiques. Paris 1955. 186 Seiten.

Der vorliegende Band enthält die Vorträge des oben genannten in Brüssel am 15., 16. und 17. Dezember 1954 vom Centre Belge de Recherches Mathématiques veranstalteten Kolloquiums.

Es ist nicht möglich, in einer kurzen Besprechung auf die einzelnen Beiträge näher einzugehen. Der Leser findet nicht nur eine Darstellung interessanter Methoden und neue Ergebnisse, er wird auch auf Probleme geführt, deren Lösung noch aussteht.

Im einzelnen enthält der Band die folgenden Beiträge:

Darmois, G., Sur la régression. Résultats nouveaux. Problèmes non résolus. — Blanc-Lapierre, A., Considérations sur certains processus ponctuels et sur des fonctions aléatoires associées. — de Finetti, B., La notion de „horizon bayésien“. — Van Dantzig, D., Sur les ensembles de confiance généraux et les méthodes dites non paramétriques. — Hemelrijk, M.J., Exemple d'application des méthodes non paramétriques et un nouveau test pour l'égalité de plusieurs probabilités. — Bartlett, M.S., The statistical analysis of stochastic processes. — Dugue, D., Deux notions utiles en statistique mathématique: les ensembles aléatoires bornés „en loi“ et la continuité fortement uniforme en probabilité. — Franckx, E., Sur les jeux stratégiques finis. — Gillis, P. et S. Huyberechts, Théorie des jeux sur le carré-unité. — Breny, H., A propos de la méthode de Daniels pour l'échantillonnage des faisceaux de fibres parallèles.

München.

J. Heinhold.

Verformung und Fließen des Festkörpers. (IUTAM Colloquium Madrid 1955.) Herausgegeben von R. Grammel. XII + 324 S. m. 188 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956. Springer-Verlag. Preis geb. 37,50 DM.

Wie in dem Vorwort des Herausgebers zum Ausdruck gebracht, ist der Anlaß zu diesem Kolloquium die sich immer mehr durchsetzende Erkenntnis, daß man bei der Behandlung der Verformungs- und Fließeigenschaften des Festkörpers nicht mehr mit dem idealisierten Kontinuum auskommt, sondern das

wirkliche Stoffverhalten besser in Betracht ziehen muß. So finden sich in diesem Band auch physikalische Beiträge über Gittertheorie und Versetzungen, die wertvolle Hinweise geben, wie die Grundlagen der Mechanik des Festkörpers zu erweitern und die nichtlinearen Erscheinungen und Zeitwirkungen zu verstehen sind. Andererseits werden Formulierungen für nichtlineares und viskoelastisches Verhalten gegeben und gezeigt, wie man aus Fließversuchen auf Grund dimensionsanalytischer Überlegungen ohne Hypothesen zu allgemeinen Formulierungen des viskoelastischen Verhaltens im nichtlinearen Bereich gelangt.

Die Beiträge sind in drei Gruppen aufgeteilt. Die erste umfaßt Versetzungen und Plastizität, die zweite nichtlineare Elastizität und Vermischtes, die dritte Viskoelastizität und Relaxation. Auch diese Gruppierung läßt erkennen, wie nahe hier physikalische Erkenntnis und mathematische Formulierung gegenübergestellt sind.

Aachen.

F. Schultz-Grunow.

A. Duschek (o. Prof. a. d. TH. Wien), Vorlesungen über Höhere Mathematik. Bd. I: Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Unendliche Reihen. Zweite, neu bearbeitete Auflage. XI + 440 S. m. 169 Abb. Wien 1956. Springer-Verlag. Preis geh. 45,— DM, geb. 48,— DM.

Die erste Auflage dieses Werkes wurde von Prof. G. Schulz in dieser Zeitschrift Band 51 (1951), S. 58 besprochen. Die jetzt vorliegende Auflage ist durchgehend überarbeitet. Dadurch ist das Buch seinem schon in der ersten Auflage angestrebten Ziel: Eine auch dem Anfänger und dem Nichtmathematiker verständliche Darstellung zu geben, die aber doch jenes Maß von Strenge aufweist, das nun einmal für die Mathematik unerlässlich ist — einen wesentlichen Schritt näher gekommen. Dem mathematisch weniger anspruchsvollen Leser zeigt der Verfasser zum Ausgleich dadurch ein gewisses Entgegenkommen, daß er in einigen Paragraphen, u. a. den Paragraphen über Punkt- und Zahlenmengen, über Flächeninhalt und über Fouriersche Reihen, Abschnitte, die beim ersten Studium übergangen werden können, bezeichnet. Selbstverständlich ist es wünschenswert, daß diese Abschnitte später durchgearbeitet werden.

In der neuen Auflage ist der Stoff etwas umgeordnet. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde aus dem ersten Band herausgenommen, um im zweiten geschlossen dargestellt zu werden. Dafür ist der Abschnitt, der die unendlichen Reihen behandelt, in den ersten Band übernommen. Eine Stoffübersicht der ersten und der zweiten Auflage wurde in einer Tabelle gegeben.

Das, was von der ersten Auflage allgemein lobend hervorgehoben wurde, nämlich daß die Darstellung von außerordentlicher Klarheit und Verständlichkeit ist, und daß es dem Verfasser mit großem didaktischem Geschick gelungen ist, dem Leser vor allen Dingen die mathematischen Begriffe und Methoden verständlich zu machen, gilt selbstverständlich auch für die vorliegende, der man ebenfalls eine weite Verbreitung wünschen kann. Druck und Ausstattung sind, wie das wohl beim Springer-Verlag selbstverständlich ist, mustergültig.

Dresden.

Willers.

W. Furrer (Prof. a. d. ETH. Zürich), Raum- und Bauakustik für Architekten. 200 S. m. 160 Abb. Basel/Stuttgart 1956. Birkhäuser-Verlag. Preis geb. 27,50 Sfr.

Das Buch ist für Architekten und Baufachleute bestimmt. Es soll diesen Leserkreis in die Probleme der

Raum- und Bauakustik einführen und vor allen Dingen praktische Hinweise geben. Der Verfasser verzichtet ganz auf Ableitungen und beschränkt sich auch bei mathematischen Formulierungen auf die Fälle, in denen diese Art der Darstellung unumgänglich erscheint.

Dem Buch ist eine Einführung in die physikalischen und subjektiven Grundlagen vorangestellt.

Das Schwergewicht liegt auf dem Kapitel „Raumakustik“. Es sind die wissenschaftlichen Erkenntnisse dieses Fachgebietes in kluger Beschränkung auf das für den Architekten Wichtige zusammengestellt worden. Anhand einer großen Anzahl von Beispielen bekannter Säle und Theater wird der Entwurf von Räumen ihrer Bestimmung entsprechend behandelt. Besonders wird hierbei auf gute Diffusität in Räumen für musikalische Darbietungen Wert gelegt.

Das letzte Kapitel behandelt die Bauakustik. Eigene Arbeiten des Verfassers machen den Abschnitt „Körperschalldämmstoffe“ besonders wertvoll.

Durch Stoffauswahl und meisterhafte Darstellung ist dieses Buch ein vorzügliches Hilfsmittel für den Architekten. Auch für den Fachmann ist es ein wertvolles Nachschlagewerk.

Dresden.

Wolfgang Kraak.

B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Aus dem Holländischen übersetzt von Helga Habicht mit Zusätzen vom Verfasser. (Wissenschaft und Kultur, Bd. 8.) 488 S. m. 180 Fig. Basel/Stuttgart 1956. Birkhäuser Verlag. Preis geb. 37,50 SFr.

Es ist erfreulich, daß das bekannte Buch „Ontwakende Wetenschap“ nun auch in deutscher Sprache

erschienen ist. Es gibt zunächst eine ausgezeichnete Übersicht über die Entwicklung der ägyptischen und babylonischen Mathematik, auch ein Kapitel über Zahlensysteme, Ziffern und Rechentechnik enthält dieser Abschnitt. Der umfangreichere Hauptteil ist der griechischen Mathematik gewidmet, er ist in fünf Abschnitte gegliedert, die die Überschriften: Das Jahrhundert von Thales und Pythagoras, das goldene Zeitalter, die Zeit Platons, die alexandrinische Zeit (330–200 v. Chr.) und Niedergang der griechischen Mathematik tragen. Der Verfasser hat der deutschen Ausgabe eine Reihe von Zusätzen hinzugefügt, z. B. über die Konstruktion des Siebenecks, das Ästrolab und die stereographische Projektion, die Geschichte des delischen Problems usw. Als den Hauptzweck des Buches bezeichnet der Verfasser den, zu zeigen „wie Thales und Pythagoras zwar von der babylonischen Mathematik ausgingen, aber ihr ein ganz neues, echt griechisches Gepräge gaben, wie die Mathematik sowohl in der Schule der Pythagoräer als auch anderweitig immer mehr entwickelt wurde und immer höheren Forderungen der Logik gerecht wurde, wie Theaitetos und Eudoxos sie auf jene Stufe der Vollkommenheit, Schönheit und Exaktheit hoben, die wir in den Elementen des Eukleides bewundern und wie die mathematische Beweisführung der Dialektik Platons und der aristotelischen Logik zum Vorbild wurde“. Die Lektüre des Buches fordert nicht viel mathematische Kenntnisse, nur muß der Leser imstande sein, den elementaren Beweisen, die als Proben der Denk- und Arbeitsweise der verschiedenen Mathematiker und ihrer Zeit gegeben werden, zu folgen. Möge das auch kulturgeschichtlich interessante Werk viele Leser finden.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Dr.-Ing. H. Graudenz, Momenten-Einflußzahlen für Durchlaufträger mit beliebigen Stützweiten. Zweite Auflage. IV + 90 S. m. 14 Abb. und 80 Zahlentafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956. Springer-Verlag. Preis brosch. 7,50 DM.

Wm. H. Corcoran, J. B. Opfell and B. H. Sage, Momentum Transfer in Fluids. IX + 394 S. m. zahlreichen Abb. New York 1956. Academic Press Inc. Preis geb. 9 \$.

St. H. Crandall (Prof. of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology), Engineering Analysis. A Survey of Numerical Procedures. X + 417 S. m. zahlr. Fig. New York/Toronto/London 1956. McGraw Hill Book Company, Inc. Preis geb. 3 £ 11 s. 6d.

Prof. Dr.-Ing. A. Leonhard, Die selbsttätige Regelung. Theoretische Grundlagen mit praktischen Beispielen. Zweite, umgearbeitete Aufl. XII + 376 S. m. 319 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957. Springer-Verlag. Preis geb. 39,— DM.

Pierre Patin (Ingenieur en Chef à la S. N. C. F.), Les Transmissions de Puissance et la Variation de la Vitesse. Mit einer Vorrede von A. Caquot. 338 S. m. 318 Fig. u. 8 Tafeln. Paris 1956. Editions Eyrolles.

Dr. Milan Vidmar (o. Prof. a. d. Univ. Ljubljana), Die Transformatoren. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. 630 S. m. 321 Abb. Basel/Stuttgart 1956. Birkhäuser Verlag. Preis geb. 68.— SFr, brosch. 64.— SFr.

Dr. phil. H. von Sanden (o. Prof. a. d. TH. Hannover), Darstellende Geometrie. Vierte bis siebente Aufl. (Teubners Mathematische Leitfäden Bd. 2.) 115 S. m. 125 Abb. im Anhang. Stuttgart 1956. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis kart. 7,80 DM.

Dr.-Ing. E. Hölzler und Dr.-Ing. H. Holzwarth, Theorie und Technik der Pulsmodulation. XIV + 505 S. m. 417 Abb. u. 3 Tafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957. Springer-Verlag. Preis geb. 57,— DM.

B. L. van der Waerden (Prof. a. d. Univ. Zürich), Mathematische Statistik. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. XXXVI.) IX + 360 S. m. 39 Abb. und 13 Tafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957. Springer-Verlag. Preis geb. 49,60 DM, geh. 47,— DM.

Bruno Eck, Technische Strömungslehre. 5. Aufl. X + 422 S. mit 407 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957. Springer-Verlag. Preis geb. 29,40 DM.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr. Dr. h. c. Fr. A. Willers, Dresden. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin W 8, Mohrenstraße 39. Fernsprecher Sammelnummer: 20 03 86. Postscheckkonto: Berlin 35021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/36/3-4. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,—. Zuzüglich Bestellgeld. Doppelheft DM 10,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1207 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik. Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza (V/12/6) (1). Printed in Germany.

JOACHIM FOCKE

Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase

2. unveränderte Auflage

Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

„Der Verfasser gibt für bestimmte Integrale von Funktionen der Bauart $g(x) \exp(-p\varphi(x))$ zu Spezialwerten des komplexen Parameters p asymptotische Entwicklungen, die mit Hilfe der ‚Methode der stationären Phase‘ gewonnen werden. Das Grundprinzip dieser Methode besteht darin, daß der Wert des Integrals im wesentlichen nur von den Stellen des Integrationsgebietes abhängt, an denen die Phasenfunktion $\varphi(x)$ stationär ist. Anschließend wird die Methode auf Doppelintegrale verallgemeinert. — Integrale der behandelten Bauart sind bei der Untersuchung der Lichtverteilung in der Kaustik optischer Systeme auszuwerten, wobei die angegebenen asymptotischen Entwicklungen für den Fall des photographischen Objektivs und des Elektronenmikroskops von Bedeutung sind.“

(Internationale Mathematische Nachrichten)

1957. 48 Seiten — 8° — DM 4,80

N. I. ACHIESER

Vorlesungen über Approximationstheorie

Übersetzung aus dem Russischen

Mathematische Lehrbücher und Monographien

„Die 1947 in wesentlich erweitertem Umfang in russischer Sprache erschienenen Vorlesungen des Verfassers über Approximationstheorie liegen nun in gut gelungener deutscher Übersetzung vor. Der Autor hat es verstanden, die vielfältigen Ergebnisse auf diesem theoretisch wie praktisch bedeutungsvollen Gebiet unter Verwendung der modernen Methoden der Funktionalanalysis einheitlich darzustellen.

Im I. Abschnitt des Buches wird zunächst das Problem der Approximationstheorie in allgemeiner Fassung formuliert, sodann werden — nach Bereitstellung der nötigen Hilfsmittel — Existenzprobleme in linearen normierten Räumen, später ausführlicher im Hilbertschen Raum behandelt. Der II. Abschnitt beschäftigt sich mit Fragen im Zusammenhang mit dem Theorem von Tschebyscheff, der nächste entwickelt wichtige Ergebnisse der harmonischen Analyse, die im IV. Abschnitt zu Untersuchungen über Extremaleigenschaften ganzer transzendenter Funktionen vom exponentiellen Typ und im fünften zur Behandlung von Fragen der besten harmonischen Approximation benötigt werden. Der letzte Abschnitt schließlich ist dem Beweis des Approximationstheorems von Wiener und damit zusammenhängender Fragestellungen gewidmet. Am Ende hat der Verfasser noch eine Reihe interessanter Ergänzungen angefügt. Es ist sehr zu begrüßen, daß dieses wertvolle Buch, das eine Lücke der Lehrbuchliteratur ausfüllt, nun auch in deutscher Sprache vorliegt.“

(Internationale Mathematische Nachrichten)

1954. IX, 309 Seiten — 10 Abbildungen — gr. 8° — Ganzleinen DM 29,—

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

A K A D E M I E - V E R L A G · B E R L I N

CURT MEYER

Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern

Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abt., Bd. 5

In dieser Untersuchung, die eine überarbeitete Fassung der Dissertation des Verfassers (Berlin 1950) darstellt, wird das allgemeine Problem der Klassenzahlberechnung algebraischer Zahlkörper für eine wohlbestimmte Gesamtheit spezieller Körper erörtert. Die von Gauß, Dirichlet und Kummer für quadratische und absolut abelsche Körper mit rationalem Grundkörper aufgestellten Klassenzahlformeln, werden hier für den Fall eines beliebigen quadratischen Grundkörpers bewiesen. Es wird die Klassenzahl derjenigen algebraischen Zahlkörper K bestimmt, deren absolut-galoisscher Zahlkörper F über einen quadratischen Zahlkörper Ω abelsch ist.

Die mathematische Untersuchung ist in drei Abschnitten durchgeführt, ihnen geht eine umfangreiche Einleitung voran, die eine historische und sachliche Übersicht über die einzelnen Probleme vermitteln soll. Am Schluß der Arbeit stehen die verschiedenartigen expliziten Klassenzahlformeln.

1956. X, 132 Seiten — 4 Abbildungen — gr. 8° — Ganzleinen DM 20,—

H. J. GRAMATZKI

Probleme der konstruktiven Optik und ihre mathematischen Hilfsmittel

2. durchgesehene Auflage

Fachurteil zur 1. Auflage:

„Der Verfasser behandelt auf Grund fast dreißigjähriger Praxis in der Industrie die wichtigsten Probleme der konstruktiven Optik sowohl vom Standpunkt ihrer mathematischen Lösung durch die geometrische Optik als auch vom Standpunkt ihrer technischen Bedeutung. Hierbei werden auch Sonderprobleme erörtert, deren Literatur meist verstreut ist und somit dem Konstrukteur nicht ohne weiteres zur Verfügung steht. Die Praxis hat gezeigt, daß solche optischen Spezialprobleme häufig zur Lösung einer Aufgabe unerlässlich sind. Ausführliche Rechenbeispiele sind angeführt. Ein besonderes Kapitel graphischer Durchrechnung ist wegen ihrer hervorragenden Eignung zur raschen Auffindung grundsätzlicher Lösungen gewidmet.“

Naturwissenschaftliche Rundschau, Stuttgart

1957. X, 142 Seiten — 82 Abbildungen — 1 Ausschlagtafel — gr. 8° — Ganzleinen DM 21,—

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N